Міністерство освіти і науки України
Миколаївський національний університет
імені В.О. Сухомлинського

О. Ю. ПАРХОМЕНКО
В. М. ДАРМОСЮК
Л. Я. ВАСИЛЬЄВА
А.М. Руда

АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ

Навчально-методичний посібник
для студентів фізико-математичних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Вектори. Системи координат.

Миколаїв
2018

УДК 514.12

Автори:

Пархоменко О.Ю., Дармосюк В.М., Васильєва Л.Я., Руда А.М.

Рецензенти:

Січкарь Т.Г.	професор Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова, кандидат фізико-математичних наук.
Бойчук О.В.	старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету, кандидат фізико-математичних наук

Рекомендовано як навчально-методичний посібник для студентів фізико-математичних спеціальностей вищих навчальних закладів

Посібник присвячено вивченню понять векторної алгебри: базис та координати вектору, дії з векторами, скалярний, векторний, мішаний добутки; розглядаються різні системи координат та формули переходу.

Мета посібника – допомогти студентам у формуванні їх математичного мислення, оволодінні теоретичними знаннями і практичними навичками розв'язування задач, необхідних в подальшій навчальній та професійній діяльності, а також підготувати студентів до використання методів аналітичної геометрії при вивченні алгебри, математичного аналізу, інформатики та інших прикладних дисциплін.

Пархоменко О.Ю.

Алгебра та геометрія: Вектори. Системи координат./ О.Ю. Пархоменко, В.М. Дармосюк, Л.Я. Васильєва, А.М. Руда: навчально-методичний посібник.– Миколаїв: МНУ, 2018– 213 с.

Зміст

Передмова

Курс аналітичної геометрії є профілюючим курсом, фундаментом математичної підготовки майбутнього фахівця в галузі природничо – математичних наук. В зв’язку з тенденціями до зменшення обсягу аудиторних занять на користь збільшення і поліпшення якості самостійної роботи студентів. Навчальний посібник охоплює такі розділи, як «Вектори», «Системи координат». Складається з п’яти практичних занять, індивідуальних та тестових завдань, містить завдання та методичні вказівки до виконання графічно-розрахункової роботи, нульовий варіант контрольної роботи.

Структура посібника відповідає поставленим навчально-методичним завданням. Навчально-методичні матеріали до кожного практичного заняття розбиті на основні теоретичні відомості, питання для самоперевірки та методичні вказівки до розв’язання задач. В пункті «Основні теоретичні відомості» без доведення наводяться теоретичні відомості, необхідні для розв’язання практичних задач. Теоретичні відомості супроводжуються розв’язками типових прикладів та методичними вказівками, які спрямовані на полегшення засвоєння матеріалу студентами. Відповідаючи на питання самоперевірки студент матиме можливість самостійно актуалізувати основні положення теоретичного матеріалу. Наведені методичні рекомендації допоможуть студенту при розв’язанні аудиторних, самостійних та індивідуальних завдань, які відповідно складають другу та третю частину кожного практичного заняття.

Самостійна робота студентів має дві складові: підготовка до аудиторних занять та підготовка до модульного контролю. Однією із складових модульного контролю є виконання та захист студентами індивідуальних завдань, графічно-розрахункової роботи.

Навчально-методичний посібник "Алгебра та геометрія: Вектори. Системи координат" пройшов апробацію на механіко-математичному факультеті Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського та одержав позитивну оцінку у студентів факультету спеціальностей "Математика та фізика", і викладачів кафедри фізики та математики.

Дана методична розробка може бути корисною як для аудиторної роботи, так і для самостійного засвоєння курсу студентами в рамках кредитно - трансферної системи навчання.

Практичне заняття 1

Поняття вектора. Лінійні операції над векторами. Лінійні комбінації векторів. Векторний простір, його базис. Координати вектора

Основні теоретичні відомості

1.1. Поняття вектора.

Більшість величин, які вивчаються із математиці і фізиці, визначаються числовим значенням: довжина, площа, об'єм, маса, робота, температура та ін. Такі величини називаються *скалярними***.** Але зустрічаються величини, які не можна повністю охарактеризувати лише їх числовим значенням. Це, наприклад, сила, швидкість, прискорення тощо. Крім їх числового значення потрібно знати ще й їх напрямок. Такі величини, які визначаються як числовим значенням, так і напрямком, називаються *векторними* або просто *векторами***.**

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого зазначений порядок його кінців. Перша точка напрямленого відрізка називається його *початком*, друга точка – його *кінцем*.

Позначаються вектори маленькими латинськими літерами: $\vec{a},\vec{b},....$, (рис. 1.1(а)), або двома великими латинськими літерами, перша з яких – точка початку вектора, а друга – точка кінця вектора: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}....$(рис 1.1(б)).

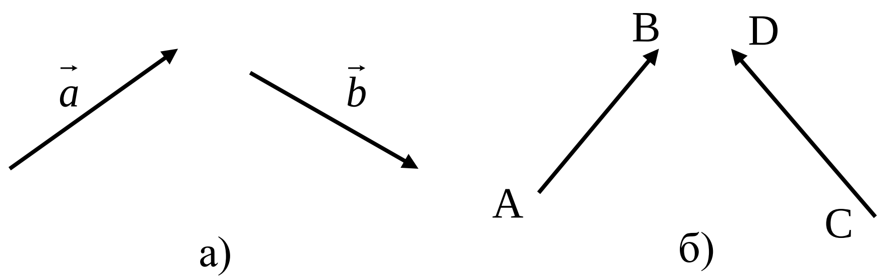


Рис. 1.1

Довжиною, або *модулем***,** вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB (при заданому масштабі), тобто відстань між його початком A і кінцем B (позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $\left|\vec{a}\right|$).

Вектор, у якого початок співпадає з його кінцем, зображується однією точкою і називається *нульовим вектором***,** або *нуль-вектором***,** та позначається так: $\vec{0},\overrightarrow{AA}$. Нуль-вектор і число нуль – це різні поняття.

Вектор називається *одиничним* або *ортом***,** якщо його модуль дорівнює одиниці.

Одиничний вектор, який колінеарний вектору $\vec{a}$ і має з ним однаковий напрям, називається *ортом вектора* $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}_0$, $|\vec{a}_0| = 1$.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих і позначаються $\vec{a} \| \vec{b}$. Нуль-вектор вважається колінеарним будь-якому вектору. Кожен вектор колінеарний самому собі.

Два ненульових колінеарних вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$, які мають однаковий напрямок, називають *співнапрямленими* (однаково напрямленими) і позначають $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ (рис. 1.2(а)), а якщо вони мають протилежні напрямки – *протилежно напрямленими*, які позначають: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ (рис. 1.2(б)).

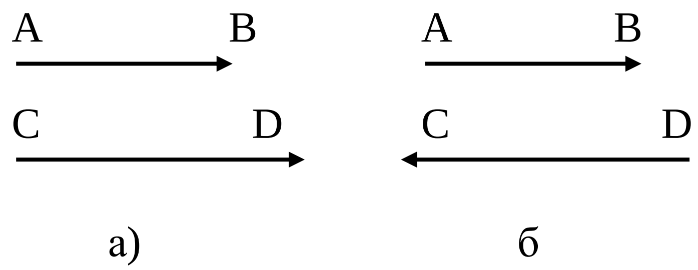


Рис. 1.2

Три ненульові вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах, в іншому випадку вони називаються *некомпланарними*. Оскільки напрямок нульового вектора не визначений, він вважається компланарним з будь-якими двома векторами.

Поняття колінеарних, співнапрямлених та компланарних векторів розповсюджується на будь-яку кількість векторів.

Два вектори називаються *рівними*, якщо вони співнапрямлені, а їх модулі рівні.

Два вектори, які мають рівні модулі і протилежно напрямлені, називаються *протилежними.* Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначається $-\vec{a}$. Так, $-\vec{a} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ – вектор, *протилежний* до вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Отже, якщо вектор $\vec{a}$ відкладений від двох різних точок, то отримані вектори рівні і їх можна вважати одним вектором $\vec{a}$. Такі вектори називаються *вільними*. Зазначимо, що у механіці співнапрямлені вектори, які мають рівні модулі, але відкладені від різних точок, можуть по-різному діяти на об'єкт. Тому там розглядають вектори, які називаються *зв'язаними*. Зв'язані вектори рівні, якщо їх початки і кінці співпадають, тобто вони зображуються одним направленим відрізком. В геометрії ми будемо розглядати тільки вільні вектори.

1.2. Лінійні операції над векторами.

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який сполучає початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$, при умові, що вектор $\vec{b}$ відкладено від кінця вектора $\vec{a}$ ("правило трикутника") (рис. 1.3).

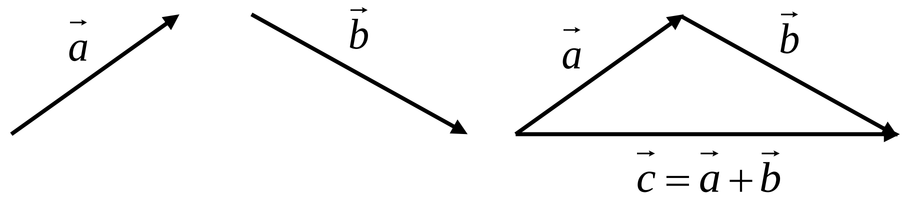


Рис. 1.3

"Правило паралелограма": якщо вектора $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відкладені від спільного початку O і на них побудовано паралелограм, то сума $\vec{a}+\vec{b}$ є вектор $\overline{OC}$, який співпадає з діагоналлю паралелограма (наслідок "правила трикутника") (рис. 1.4).

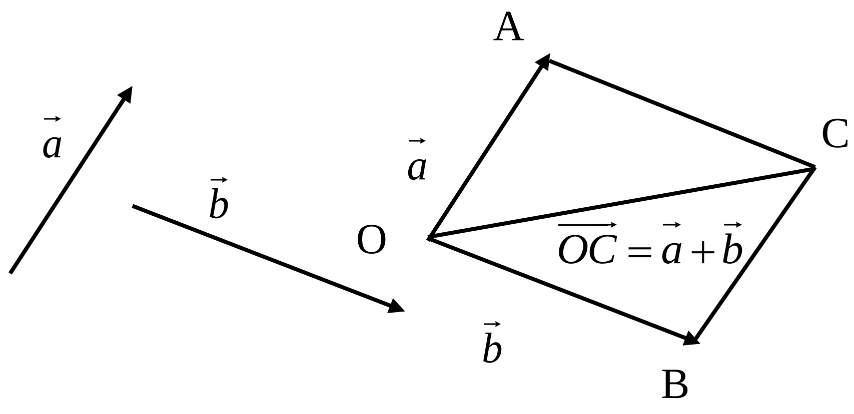


Рис. 1.4

Щоб побудувати суму будь-якого числа векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$, досить вектори розмістити так, щоб початок кожного наступного вектора-доданка був кінцем попереднього. Тоді вектор $\overrightarrow{OA_n}$, початком якого є початок O першого вектора і кінець A_n – кінцем останнього вектора $\overrightarrow{a_n}$, і буде сумою даних векторів ("правило многокутника") (рис. 1.5).

$$\vec{c} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4} + \overrightarrow{a_5}$$

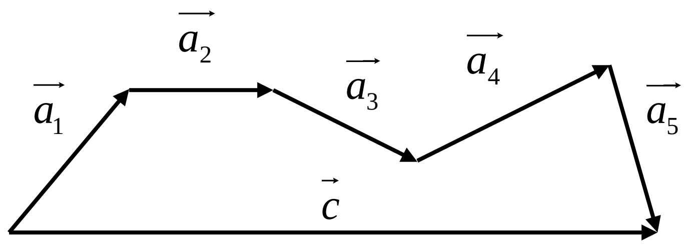


Рис. 1.5

Для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ справедливі наступні рівності:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативний закон додавання).
2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (асоціативний закон додавання).
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
4. $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$.

Різницею двох векторів $\vec{a} - \vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$ (рис. 1.6).

Позначення: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, якщо $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

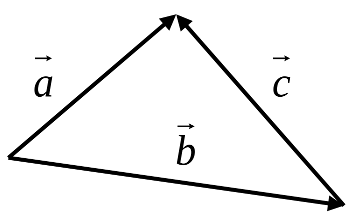


Рис. 1.6

Різниця будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ завжди існує і визначається однозначно, так як $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Отже, щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$ потрібно до вектора $\vec{a}$ додати вектор $-\vec{b}$.

Добутком вектора $\vec{a}$ *на дійсне число* α називається вектор $\vec{p}$, який задовольняє умовам:

а) $\left|\vec{p}\right|=|\alpha|\cdot\left|\vec{a}\right|$, $|\alpha|$ – абсолютне значення числа α;

б) вектори $\alpha\vec{a}$ і $\vec{a}$ колінеарні;

б) $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{a}$, якщо $\alpha\geq 0$, $\vec{p}\uparrow\downarrow\vec{a}$, якщо $\alpha<0$.

Позначення: $\vec{p}=\alpha\vec{a}$.

Добуток нульового вектора на довільне число або довільного вектора на число 0 дорівнює нуль-вектору: $\vec{a}\cdot 0=0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Для довільних чисел α, β і векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливі наступні рівності:

1. $1\vec{a}=\vec{a}$.
2. $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\vec{a}$ (асоціативний закон множення).
3. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (дистрибутивний закон).
4. $\left(\alpha+\beta\right)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (дистрибутивний закон).

Властивості лінійних операцій встановлюють такі ж правила дій з векторами, як з алгебраїчними виразами.

1.3. Лінійні комбінації векторів.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$. Множину векторів $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ називають *системою векторів*. Будь-яка частина системи векторів називається *підсистемою*.

Один вектор $\overrightarrow{a_1}$ також утворює систему, при $\overrightarrow{a_1}=\vec{0}$ – лінійно залежну, а при $\overrightarrow{a_1}\neq\vec{0}$ – лінійно незалежну.

Лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ називається вектор $\vec{p}=\alpha_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\cdot\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_n\cdot\overrightarrow{a_n}$ де $\alpha_i\in R$, $i=1,2,...,n$ (R – множина дійсних чисел).

В цьому випадку кажуть, що вектор $\vec{p}$ розкладено за векторами $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$, а числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ називають *коефіцієнтами розкладання*.

Лінійна комбінація $0\cdot\overrightarrow{a_1}+0\cdot\overrightarrow{a_2}+...+0\cdot\overrightarrow{a_n}$ з нульовими коефіцієнтами називається *тривіальною*.

Лінійні комбінації векторів мають *властивості*:

1. Якщо вектори $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ – колінеарні, то будь-яка їх лінійна комбінація їм колінеарна.

2. Якщо вектори $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ – компланарні, то будь-яка їх лінійна комбінація їм компланарна.

Система векторів $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ називається *лінійно залежною,* якщо лінійна комбінація $\alpha_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\cdot\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_n\cdot\overrightarrow{a_n}=0$ і існує хоча б один коефіцієнт $\alpha_i\neq 0$, $i=1,2,...,n$.

Система векторів $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ називається *лінійно незалежною,* якщо лінійна комбінація $\alpha_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\cdot\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_n\cdot\overrightarrow{a_n}=0$ тільки тоді, коли всі коефіцієнти $\alpha_i=0$, $i=1,2,...,n$.

Теорема 1. *Система векторів* $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ *лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли принаймні один із них є лінійною комбінацією інших векторів системи.*

Наслідки:

1. Два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.

2. На прямій існує тільки один лінійно незалежний вектор.

Властивості лінійно залежних і лінійно незалежних векторів:

1. Якщо в систему векторів входить нульовий вектор, то вона лінійно залежна.

2. Якщо в системі векторів є два рівних вектори, то вона лінійно залежна.

3. Якщо в системі векторів є два пропорційні вектори ($\overrightarrow{a_i}=\alpha\cdot\overrightarrow{a_j}$), то вона лінійно залежна.

4. Система з $n>1$ векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоча б один з векторів є лінійною комбінацією інших.

5. Будь-які вектори, що входять в лінійно незалежну систему, утворюють лінійно незалежну підсистему.

6. Система векторів, що містить лінійно залежну підсистему, лінійно залежна.

7. Якщо система векторів $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ лінійно незалежна, а після приєднання до неї вектора $\vec{p}$ перетворюється в лінійно залежну, то

вектор $\vec{p}$ можна розкласти за векторами $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$, і притому єдиним чином, тобто коефіцієнти розкладання знаходяться однозначно.

1.4. Векторний простір, його базис.

Непуста множина векторів, на якій визначені дві бінарні операції – додавання векторів та множення вектора на число, і при цьому виконуються зазначені властивості, а саме:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b}: \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}: \quad \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;
3. $\exists \vec{0}: \quad \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
4. $\forall \vec{a} \exists \left(-\vec{a}\right): \vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$;
5. $\forall \vec{a}: \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
6. $\forall \alpha, \beta \in R, \forall \vec{a}: \quad \alpha\left(\beta \cdot \vec{a}\right) = \left(\alpha \cdot \beta\right)\vec{a}$;
7. $\forall \alpha, \beta \in R, \forall \vec{a}: \left(\alpha + \beta\right)\vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$;
8. $\forall \alpha \in R, \forall \vec{a}, \vec{b}: \quad \alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$.

називається *векторним простором V*. Підмножина векторного простору, яка сама є векторним простором, називається *підпростором* даного векторного простору.

Впорядкована система векторів, яка задовольняє таким умовам:

1) ця система векторів лінійно незалежна;

2) будь-який інший вектор із даного векторного простору є лінійною комбінацією даної системи векторів, називається *базисом векторного простору*.

Інакше кажучи *базисом векторного простору* називається впорядкована максимальна система лінійно незалежних векторів даного векторного простору.

Розмірністю векторного простору називається число векторів базису, тобто максимальна кількість лінійно незалежних векторів.

1.5. Координати вектора.

Базисом на прямій називається будь-який ненульовий вектор $\vec{e}$ на цій прямій (рис. 1.7). Цей вектор $\vec{e}$ також називають *базисним*.

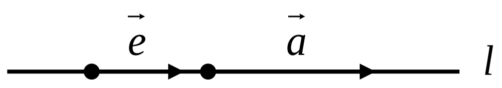


Рис. 1.7

Якщо на прямій l задано базис $\vec{e} \neq \vec{0}$, то для будь-якого колінеарного до даної прямої вектора $\vec{a}$ справедливе співвідношення $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{e}$, причому число α визначається однозначно.

Теорема 3 *(про розклад вектора по базису на прямій). Будь-який вектор $\vec{a}$, колінеарний прямій, можна розкласти за базисом $\vec{e}$ на цій прямій, тобто представити у вигляді $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{e}$, де число α визначається однозначно.*

Коефіцієнт α називається *координатою вектора* $\vec{a}$ відносно базису $\vec{e}$. Всі ненульові вектори, співнапрямлені з вектором $\vec{e}$ мають додатні координати, а протилежно напрямлені – від’ємні. Координата нульового вектора дорівнює нулю.

Базисний вектор на прямій задає напрямок на цій прямій, а його довжина визначає масштабний відрізок, отже задавши базис на прямій, ми отримуємо вісь.

Властивості для векторів, які колінеарні до даної вісі:

1. Рівні вектори мають рівні координати.
2. Координата суми векторів дорівнює сумі координат доданків.
3. Координата добутку вектора на число дорівнює добутку цього числа на координату вектора.
4. Координата лінійної комбінації векторів дорівнює лінійній комбінації координат векторів.
5. Відношення ненульових векторів, колінеарних прямій, дорівнює відношенню їх координат, визначених відносно будь-якого базису на цій прямій.

Базисом на площині називаються два неколінеарних вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ на цій площині, які взято в певному порядку. Ці вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ також називають *базисними*.

Три вектора називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині, або паралельні до однієї площини.

Очевидно, що будь-які два вектора завжди компланарні. Три вектора, два з яких колінеарні – компланарні.

Теорема 4. *Якщо система компланарних векторів містить неколінеарні вектори* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, *то будь-який вектор* $\vec{a}$ *цієї системи є лінійною комбінацією цих векторів:*

$$\vec{a} = \alpha \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta \cdot \overrightarrow{e_2}; \qquad \alpha, \beta \text{ – єдині.}$$

Наслідки з даної теореми:

1. Система компланарних векторів, яка складається більше ніж з двох векторів – лінійно залежна.

2. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

3. Система всіх компланарних векторів утворює двомірний векторний простір.

На площині задамо базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, та побудуємо прямі l_1, l_2, які містять задані базисні вектори (рис. 1.8). Ці прямі перетинаються, оскільки вектори $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ неколінеарні.

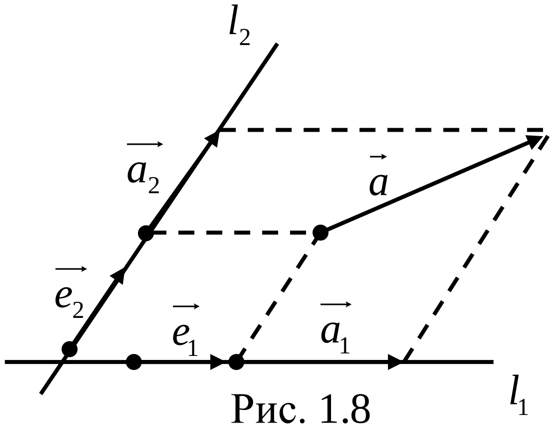


Рис. 1.8

Вектор $\vec{a}$ можна представити у вигляді $\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$, де $\overrightarrow{a_1}$ – проекція вектора $\vec{a}$ на l_1 вздовж l_2, а $\overrightarrow{a_2}$ – проекція вектора $\vec{a}$ на l_2 вздовж l_1, причому проекції визначаються однозначно. Вектор $\overrightarrow{a_1}$, що належить прямій l_1 можна розкласти за базисом $\overrightarrow{e_1}$ на цій прямій, тобто представити у вигляді $\overrightarrow{a_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{e_1}$, причому число α визначається однозначно. Вектор $\overrightarrow{a_2}$, що належить прямій l_2 можна розкласти за базисом $\overrightarrow{e_2}$ на цій прямій, тобто представити у вигляді $\overrightarrow{a_2} = \beta \cdot \overrightarrow{e_2}$, причому число β визначається однозначно. Підставляючи ці значення в рівність $\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2}$, отримуємо

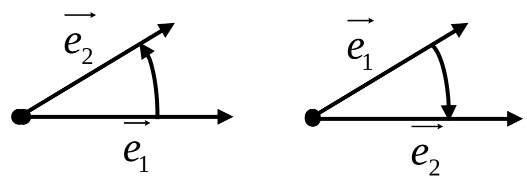
$$\vec{a} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}.$$

Теорема 5 *(про розклад вектора за базисом на площині). Будь-який вектор $\vec{a}$, що належить площині, можна розкласти за базисом $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ на цій площині, тобто представити у вигляді $\vec{a} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}$, де числа α і β визначаються однозначно.*

Коефіцієнти α і β називаються *координатами вектора* $\vec{a}$ відносно базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ (число α називають *абсцисою*, а β – *ординатою* вектора $\vec{a}$). Наприклад, числа 3 і –4 є координатами вектора $\vec{a} = 3\vec{e_1} - 4\vec{e_2}$ ($\alpha = 3$ – абсциса, $\beta = -4$ – ордината вектора $\vec{a} = 3\vec{e_1} - 4\vec{e_2}$). Також координати вектора позначаються таким чином: $\vec{a} = (\alpha; \beta)$, наприклад, $\vec{a} = (3; -4)$

Базисні вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2}$, початок яких співпадає, називаються *репером на площині*.

Базис на площині називається *правим*, якщо найкоротший поворот від першого вектора до другого відбувається проти годинникової стрілки (цей напрямок повороту вважається додатнім) (рис. 1.9 (а)). В іншому випадку базис називається *лівим* (рис 1.9 (б)).



а) Рис. 1.9 б)

Базисом в просторі називаються три некомпланарних вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, які взято в певному порядку. Ці вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ також називають *базисними*.

Теорема 6. *Якщо вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ некомпланарні, то для будь-якого вектора $\vec{p}$ існують єдині числа α, β, γ такі, що $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{e_1} + \beta \cdot \vec{e_2} + \gamma \cdot \vec{e_3}$.*

В просторі задамо базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, та побудуємо прямі l_1, l_2, l_3, які містять задані базисні вектори (рис. 1.10). Нехай ці прямі перетинаються в одній точці.

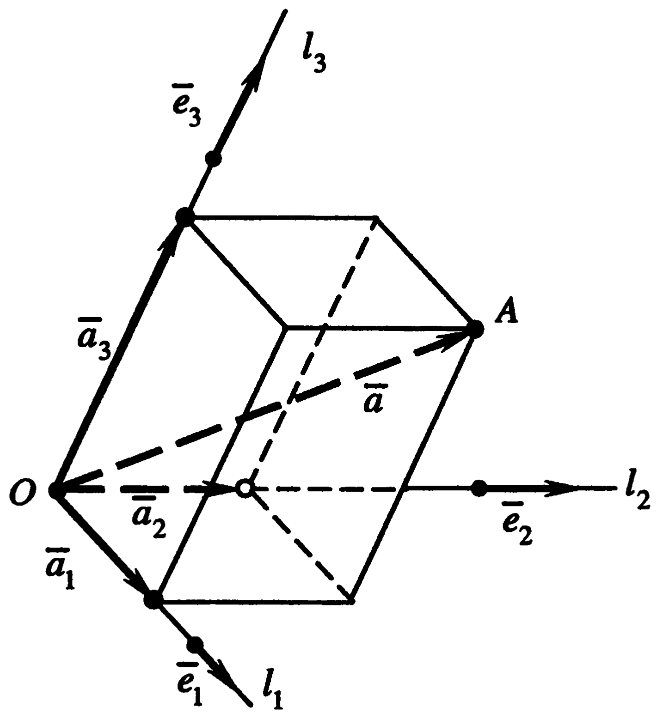


Рис. 1.10.

Будь-який вектор $\vec{a}$ можна представити у вигляді суми проекцій $\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$, де $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ – вектори, що належать прямим l_1, l_2, l_3 відповідно.

Розкладаючи проекції $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ по базисам на відповідних прямих, знаходимо: $\overrightarrow{a_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{a_2} = \beta \cdot \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{a_3} = \gamma \cdot \overrightarrow{e_3}$. Підставляючи дані вирази в рівність $\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$, отримаємо:

$$\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} + \gamma\overrightarrow{e_3}$$

Теорема 7 *(про розклад вектора за базисом в просторі). Будь-який вектор* $\vec{a}$ *можна розкласти за базисом* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ *в просторі, тобто представити у вигляді* $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} + \gamma\overrightarrow{e_3}$, *де числа* α, β *і* γ *визначаються однозначно.*

Коефіцієнти α, β і γ називаються *координатами вектора* $\vec{a}$ відносно базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ (число α називають *абсцисою*, β – *ординатою* вектора $\vec{a}$, γ – *аплікатою* вектора $\vec{a}$). Наприклад, числа 3, –4 і 2 є координатами вектора $\vec{a} = 3\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$ ($\alpha = 3$ – абсциса,

$\beta = -4$ – ордината, $\gamma = 2$ – апліката вектора $\vec{a} = 3\vec{e_1} - 4\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$). Також координати вектора позначаються таким чином: $\vec{a} = (\alpha; \beta; \gamma)$, наприклад, $\vec{a} = (3; -4; 2)$

Базисні вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, які відкладені від однієї (довільної) точки, називаються *репером*.

Базис в просторі називається *правим*, якщо, дивлячись з кінця третього вектора, найкоротший поворот від першого вектора до другого відбувається проти годинникової стрілки. Якщо такий поворот відбувається за годинниковою стрілкою, то такий базис називається *лівим*.

Поняття базису безпосередньо пов'язано з поняттям лінійної незалежності векторів. Базис – це упорядкована сукупність лінійно незалежних векторів: на прямій – один лінійно незалежний вектор, на площині – два лінійно незалежних вектори в певному порядку, в просторі – три лінійно незалежних вектори в певному порядку.

Будь-який вектор на прямій, на площині, в просторі лінійно виражається через базисні вектори.

Базис – це максимальна лінійно незалежна система векторів, яку не можливо доповнити яким-небудь вектором без втрати лінійної незалежності.

Теорема 8. *Кожна координата лінійної комбінації декількох векторів, заданих своїми координатами, являє собою ту ж лінійну комбінацію відповідних координат цих векторів.*

Наслідки з цієї теореми:

1. Координати суми двох векторів дорівнюють сумі відповідних координат цих векторів.

2. Координати різниці двох векторів дорівнюють різниці відповідних координат цих векторів.

3. При множенні вектора на число, необхідно помножити кожну координату вектора на це число.

4. Рівні вектори мають рівні координати (в одному і тому самому базисі).

Теорема 9 *(умова колінеарності двох векторів у координатній формі). Два вектора $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні.*

Питання для самоперевірки

1. Що називається вектором?

2. Що називається довжиною (абсолютною величиною або модулем) вектора?

3. Який вектор називають нульовим?

4. Як виконуються операції додавання і віднімання векторів?

5. Сформулюйте властивості операції додавання векторів.

6. Дати означення множенню вектора на число, сформулюйте властивості цієї операції.

7. Які вектори називають колінеарними? Яка умова колінеарності двох векторів?

8. Які вектори називають компланарними?

9. Які вектори називають рівними?

10. Що таке лінійна комбінація векторів?

11. Яку систему векторів називають лінійно залежною? лінійно незалежною?

12. Що називають векторним простором?

13. Сформулюйте означення базису на прямій.

14. Сформулюйте означення базису на площині.

15. Сформулюйте означення базису в просторі.

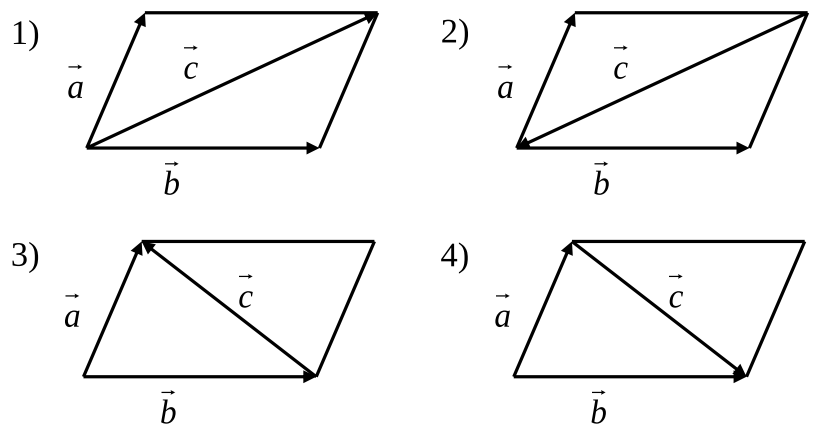
16. Який базис називають правим? лівим?

17. Що таке координати вектора?

18. Що називають репером?

19. Як виконуються лінійні операції над векторами в координатній формі?

20. Встановити відповідність між малюнками та векторними рівностями:



$$а)\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0};\ б)\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{0};\ в)\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\vec{0};\ г)\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}.$$

Методичні вказівки до розв’язання задач

Приклад 1. Покажіть, що для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$. При яких умовах в даному співвідношенні має місце знак рівності?

Розв'язання. Якщо принаймні один з даних векторів нульовий, то очевидно, що $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$. Рівність має місце і у випадку, коли $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. В інших випадках $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| < \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$, так як маємо не що інше, як нерівність трикутника ($\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, $\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{b}\right|$ – сторони трикутника). Відмітимо, що у випадку, коли $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

Приклад 2. Чи колінеарні вектори $\vec{a} = \vec{p} + 3\sqrt{2}\vec{g}$ і $\vec{b} = \sqrt{2}\vec{p} + 6\vec{g}$?

Розв'язання: $\vec{b} = \sqrt{2}(\vec{p} + 3\sqrt{2}\vec{g}) = \sqrt{2}\vec{a}$. Отже, вектори колінеарні, $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Приклад 3. Як зв’язані ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо мають місце співвідношення: 1) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; 2) $\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$?

Розв’язання. Рівність $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ означає, що довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, рівні. Такий паралелограм є прямокутник, отже, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.

У лівій частині рівності $\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$ записано орт $\overrightarrow{a_0}$ вектора $\vec{a}$, а у правій частині – орт $\overrightarrow{b_0}$ вектора $\vec{b}$. Рівність ортів двох векторів означає їх однакову направленість. Таким чином, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають однакові напрямки.

Приклад 4. Довести, що для того, щоб з трьох даних векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ можна було побудувати трикутник, необхідно і достатньо, щоб $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, де $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ – неколінеарні вектори.

Розв'язання. Необхідність. Дано: ABC – трикутник. Довести: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Доведення. З правила трикутника випливає, що $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, але $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$, звідки $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Достатність. Дано: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ – неколінеарні вектори. Довести: ABC – трикутник.

Доведення.

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}\right)\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}\right)\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\right).$$

Остання рівність означає, що $\overrightarrow{AC}$ є сумою неколінеарних векторів $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$. Отже, ABC – трикутник із сторонами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.

Приклад 5. Дано вектори $\overrightarrow{p_1}$ і $\overrightarrow{p_2}$. Колінеарні чи ні вектори $\overrightarrow{p_1}=\vec{a}-2\sqrt{3}\vec{b}$ і $\overrightarrow{p_2}=-\sqrt{3}\vec{a}+6\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – неколінеарні вектори?

Розв'язання. В розкладі вектора $\overrightarrow{p_2}$ винесемо за дужку $-\sqrt{3}$:

$$\overrightarrow{p_2}=-\sqrt{3}(\vec{a}-2\sqrt{3}\vec{b}).$$

Тоді $\overrightarrow{p_2}=-\sqrt{3}\overrightarrow{p_1}$, що свідчить про те, що вектори $\overrightarrow{p_1}$ і $\overrightarrow{p_2}$ колінеарні і протилежно напрямлені.

Приклад 6. З точки O виходять два вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Знайти який-небудь вектор $\overrightarrow{OM}$, який йде по бісектрисі кута AOB.

Розв'язання. Знайдемо орти $\overrightarrow{a_0}$ і $\overrightarrow{b_0}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\overrightarrow{a_0}$, $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\overrightarrow{b_0}$ і на них як на сторонах побудуємо ромб. (Рис. 1.11)

Тоді, так як діагональ ромба поділяє його кути навпіл, вектор $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{a_0}+\overrightarrow{b_0}$, або $\overrightarrow{OM}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, лежить на бісектрисі кута $\angle AOB$.

Відповідь: $\overrightarrow{OM}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

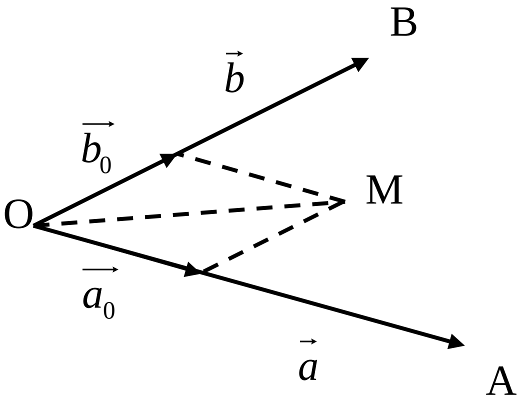


Рис.1.11

Приклад 7. Дано вектори $\vec{a}=(1;1;-1)$, $\vec{b}=(2;-1;3)$, $\vec{c}=(1;-2;1)$. Розкласти вектор $\vec{d}=(12,-9,11)$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Розв'язання: Нехай $\vec{d}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}+\gamma\cdot\vec{c},\ \ \alpha,\beta,\gamma$ – деякі коефіцієнти. Так як рівні вектори мають рівні координати, а координати лінійної комбінації векторів рівні відповідним лінійним комбінаціям однойменних координат, то

$$\begin{cases}12=\alpha+2\beta+\gamma,\\ -9=\alpha-\beta-2\gamma,\\ 11=-\alpha+3\beta+\gamma.\end{cases}$$

Із системи знайдемо: $\alpha=2,\beta=3,\gamma=4$.

Отже, $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$.

Відповідь: $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$.

Приклад 8. Середня лінія трикутника паралельна його третій стороні і її довжина дорівнює половині довжини цієї сторони. Довести це.

Розв'язання. На основі правила трикутника додавання векторів можна записати: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}$, де M і N відповідно середини сторін AB і BC (рис. 1.12). Оскільки $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. З того, що $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, випливає, що $\overrightarrow{MN}\parallel\overrightarrow{AC}$ і $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|$.

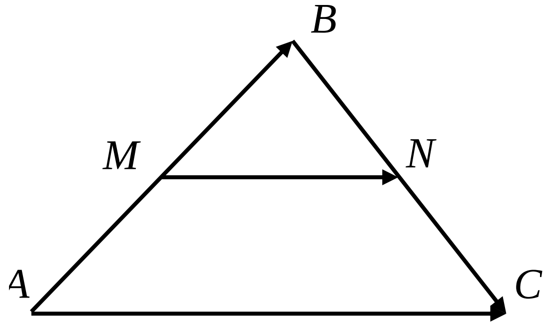


Рис. 1.12

Приклад 9. Доведіть, що середини основ трапеції і точка перетину продовжень їх бічних сторін належать одній прямій.

Розв'язання. Нехай M і N – середини відрізків AD і BC (рис. 1.13). Тоді $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SD}\right)$, $\overrightarrow{SN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

З подібності трикутників ΔSBC і ΔSAD маємо: $\frac{\left|\overrightarrow{SA}\right|}{\left|\overrightarrow{SB}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{SD}\right|}{\left|\overrightarrow{SC}\right|}$.

Позначивши величину цього відношення через k, дістанемо: $\left|\overrightarrow{SA}\right|=k\left|\overrightarrow{SB}\right|$, $\left|\overrightarrow{SD}\right|=k\left|\overrightarrow{SC}\right|$. Отже, $\overrightarrow{SA}=k\cdot\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SD}=k\cdot\overrightarrow{SC}$. Тоді: $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{2}\left(k\cdot\overrightarrow{SB}+k\cdot\overrightarrow{SC}\right)=k\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)\right)$.

Врахувавши рівність $\overrightarrow{SN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$, матимемо: $\overrightarrow{SM}=k\cdot\overrightarrow{SN}$, а з цього слідує, що точки S, M і N лежать на одній прямій.

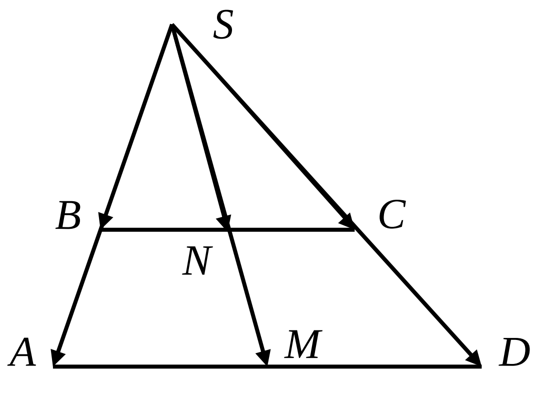


Рис. 1.13

Приклад 10. У трикутнику ABC бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $\frac{|BD|}{|CD|}=\frac{1}{2}$. В якому відношенні медіана CE ділить цю бісектрису?

Розв'язання. Нехай $[CE]\cap[AD]=O$ і $\dfrac{|AO|}{|OD|}=\dfrac{n}{m}$ (рис. 1.14).

$$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right);$$

$$\overrightarrow{CO}=x\overrightarrow{CE}=\frac{x}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{x}{2}\overrightarrow{CB}. \qquad (*)$$

$$\overrightarrow{CO}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{CA}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{CD}.$$

Оскільки $\overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, то

$$\overrightarrow{CO}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{CA}+\frac{2n}{3(m+n)}\overrightarrow{CB}. \qquad (**)$$

Прирівнявши коефіцієнти, які стоять при $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$ у рівностях (*) і (**), дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{m}{m+n}=\dfrac{x}{2},\\[2mm] \dfrac{2n}{3(m+n)}=\dfrac{x}{2}.\end{cases}$$

Почленно поділивши їх, матимемо $\dfrac{3m}{2n}=1$, або $\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{3}$.

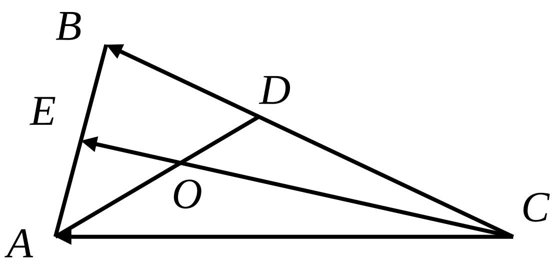


Рис. 1.14

Приклад 11. Точки перетину медіан трикутників ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ збігаються. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ компланарні.

Розв'язання. Вибравши довільну точку O простору і застосувавши для точок M_1 і M_2 формулу точки перетину медіан трикутників ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ відповідно дістанемо: $\overrightarrow{OM_1}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}\right)$, $\overrightarrow{OM_2}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. Якщо почленно віднімемо ці рівності, то матимемо: $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right)=\vec{0}$, або $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}$, тобто вектори $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ компланарні.

Приклад 12. Знайти лінійну комбінацію $3\overrightarrow{a_1}-5\overrightarrow{a_2}-\overrightarrow{a_3}$ векторів $\overrightarrow{a_1}=(4;-2;1)$, $\overrightarrow{a_2}=(-2;3;-4)$, $\overrightarrow{a_3}=(0;-6;7)$.

Розв'язання. Якщо вектори визначаються своїми координатами, то лінійні операції над ними визначаються тими ж лінійними операціями над їх координатами. Тому

$$3\overrightarrow{a_1}-5\overrightarrow{a_2}-\overrightarrow{a_3}=3(4;-2;1)-5(-2;3;-4)-(0;-6;7)=$$
$$=(12+10-0;\ -6-15+6;\ 3+20-7)=(22;\ -15;\ 16)$$

Приклад 13. Дано систему трьох чотиривимірних векторів: $\overrightarrow{a_1}=(1,2,1,2)$, $\overrightarrow{a_2}=(-1,-3,4,5)$, $\overrightarrow{a_3}=(-5,0,2,3)$. З'ясувати лінійну залежність системи векторів.

Розв'язання. Складемо лінійну комбінацію даної системи векторів

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\lambda_3\overrightarrow{a_3}=\vec{0}\ (*)$$

і встановимо, при яких значеннях коефіцієнтів $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ вона можлива. Маємо:

$$\lambda_1(1,2,1,2)+\lambda_2(-1,-3,4,5)+\lambda_3(-5,0,2,3)=(0,0,0,0),$$

звідси дістаємо таку систему лінійних однорідних рівнянь з невідомими λ_1, λ_2, λ_3

$$\begin{cases} \lambda_1-\lambda_2-5\lambda_3=0,\\ 2\lambda_1-3\lambda_2=0,\\ \lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3=0,\\ 2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3=0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему методом Гаусса, прийдемо до вивідної системи:

$$\begin{cases} \lambda_1-\lambda_2-5\lambda_3=0,\\ -\lambda_2+10\lambda_3=0,\\ \lambda_3=0,\\ 0=0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $\lambda_3=0$ і далі $\lambda_2=0,\ \lambda_1=0$. Отже, система лінійних рівнянь має тільки тривіальний розв'язок $(0,0,0)$. Тим самим встановлено, що рівність $(*)$ можлива тільки при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, тому задана система векторів є лінійно незалежною.

Приклад 14. Довести, що для будь-яких трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і будь-яких трьох чисел α, β, γ вектори $\alpha \cdot \vec{a} - \beta \cdot \vec{b}$, $\gamma \cdot \vec{b} - \alpha \cdot \vec{c}$, $\beta \cdot \vec{c} - \gamma \cdot \vec{a}$ лінійно залежні.

Розв'язання. Якщо три лінійні комбінації лінійно залежні, визначник, складений із їх коефіцієнтів, має бути рівним нулю. Перевіримо це.

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \gamma & -\alpha \\ -\gamma & 0 & \beta \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \gamma & -\alpha \\ 0 & \beta \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 0 & -\alpha \\ -\gamma & \beta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma = 0.$$

(Визначник обчислюємо розкладом за елементами першого рядка).

Твердження доведено.

Приклад 15. Дано лінійно залежну систему векторів $\overrightarrow{a_1} = (1,2,3,2)$, $\overrightarrow{a_2} = (-2,1,-2,-5)$, $\overrightarrow{a_3} = (1,-1,-1,1)$, $\overrightarrow{a_4} = (-1,2,1,-2)$. Знайти існуючу між векторами лінійну залежність.

Розв'язання. Знайдемо існуючу між векторами лінійну залежність. Оскільки система лінійно залежна, для цієї системи векторів має місце рівність:

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \lambda_3\overline{a}_3 + \lambda_4\overline{a}_4 = \overline{0}, \qquad (*)$$

або

$$\lambda_1(1,2,3,2) + \lambda_2(-2,1,-1,-5) + \lambda_3(1,-1,-1,1) + \lambda_4(-1,2,1,-2) = (0,0,0,0).$$

Прирівнявши відповідні компоненти векторів в обох частинах цієї векторної рівності, дістанемо систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0, \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ 2\lambda_1 - 5\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Застосувавши до цієї системи метод Гаусса послідовного виключення невідомих, дістанемо вивідну систему:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Звідси видно, що однорідна система (**) невизначена. Вважаючи λ_4 вільною невідомою і переносячи її в праву частину, одержимо загальний розв'язок цієї системи у вигляді рівностей

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2}\lambda_4, \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}\lambda_4, \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_4. \end{cases}$$

Якщо надати вільній невідомій λ_4 певного числового значення, то дістанемо, відповідно, певну лінійну залежність між векторами системи. Так, при $\lambda_4 = 2$, дістанемо $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1.$ Підставляючи знайдені значення в (**), дістанемо рівність

$$-\overline{a}_1 - \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + 2\overline{a}_4 = \overline{\theta}.$$

Вправи для аудиторної і самостійної роботи

1. Знайти координати векторів $2\overline{a} + 5\overline{b}$ та $2\overline{b} - \overline{a}$, якщо $\overline{a} = (2;-4;2)$, $\overline{b} = (-3;2;-1)$.

2. Дано точки $M_1(1;2;3)$ та $M_2(3;-4;6)$. Знайти координати векторів $\overline{M_1M_2}$ і $\overline{M_2M_1}$.

3. Перевірити колінеарність векторів:

а) $\overline{a} = (2;-1;3)$ і $\overline{b} = (-6;3;-9)$.

б) $\overline{a} = (3,2,-1)$ і $\overline{b} = (-6,-4,2)$.

4. Дано вектори $\overline{a} = (3;0;-2), \overline{b} = (1;2;-5), \overline{c} = (-1;1;1), \overline{d} = (8;4;1)$. Знайти координати векторів – лінійних комбінацій: $-5\overline{a} + \overline{b} - 6\overline{c} + \overline{d}$, $3\overline{a} - \overline{b} - \overline{c} - \overline{d}$.

5. Дано три вектори $\overline{a} = (1,2), \overline{b} = (-5,-1), \overline{c} = (-1,3)$. Знайти координати лінійних комбінацій $2\overline{a} + 3\overline{b} - \overline{c}$, $16\overline{a} + 5\overline{b} - 9\overline{c}$.

6. Дано вектори $\overline{a} = (1,3), \overline{b} = (2,-1), \overline{c} = (-4,1)$. Знайти числа α і β, щоб виконувалась рівність $\alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$.

7. Дослідити на лінійну залежність систему векторів: $\overline{a}_1 = (4, -5, 2, 6), \overline{a}_2 = (2, -2, 1, 3), \overline{a}_3 = (6, -3, 3, 9), \overline{a}_4 = (4, -1, 5, 6)$.

8. Виразити вектор $\overline{d} = (4, 12, -3)$ як лінійну комбінацію векторів $\overline{a} = (2, 3, 1), \overline{b} = (5, 7, 0), \overline{c} = (3, -2, 4)$.

9. Задано вектори $\overline{a} = (2, 3), \overline{b} = (1, -3), \overline{c} = (-1, 3)$. При якому значенні коефіцієнта λ вектори $\overline{p} = \overline{a} + \lambda \overline{b}$ та $\overline{q} = \overline{a} + 2\overline{c}$ колінеарні?

10. Задано три послідовні вершини паралелограма A, B, C. Знайти його четверту вершину D, якщо:

а) $A(1, 0, -3), B(-1, 2, 1), C(2, -3, -2)$;

б) $A(-1, 2, 3), B(-3, 4, -1), C(-2, 3, 5)$;

в) $A(3, 3, -5), B(-5, 6, 2), C(4, -7, 2)$;

г) $A(2, -5, 3), B(1, -2, 4), C(4, -4, 2)$.

д) $A(1, -2, 3), B(3, 2, 1), C(6, 4, 4)$

11. Довести, що трикутник з вершинами $A(-5, 3, 4), B(-1, -7, 5), C(6, -5, -3), D(2, 5, -4)$ – квадрат.

Відповіді:

1. 1) $(-11; 2; -1)$; 2) $(-8; 8; -4)$. **2.** $(2; -6; 3)$, $(-2; 6; -3)$. **4.** $(0; 0; 0)$, $(1; -7; -3)$. **5.** $(-15; -3)$, $(-9; 27)$. **6.** $\alpha = \frac{2}{7}, \beta = \frac{13}{7}$. **8.** $\alpha = -23$, $\beta = 13$, $\gamma = 5$. **9.** -2. **10.** а) $(4; -5; -6)$; б) $(0; -9; 9)$; в) (12;- 10;- 5); г) $(5; -7; 1)$; д) $(4; 0; 6)$.

Індивідуальне завдання

Вектори

Варіант 1.

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, обчислити $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 22$, $|\vec{b}| = 14$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 24$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

Довести, що вектори $\vec{a}\{-1;1;-1\}$, $\vec{b}\{-1;1;1\}$, $\vec{c}\{-1;1;1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-2;2;0\}$.

Варіант 2

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, обчислити $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$ колінеарні?

3. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 9$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 11$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{0;2;-1\}$, $\vec{b}\{2;1;-2\}$, $\vec{c}\{-1;-1;1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-2;-1;1\}$.

Варіант 3

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, обчислити $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 8\vec{j} + 12\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 11$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 17$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{-2;-1;2\}$, $\vec{b}\{1;-1;-1\}$, $\vec{c}\{-1;1;2\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-1;0;-2\}$.

Варіант 4

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, обчислити $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -4\vec{i} + 8\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 11$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 9$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{0;-1;1\}$, $\vec{b}\{-1;1;1\}$, $\vec{c}\{1;2;1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-1;3;4\}$.

Варіант 5

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, обчислити $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 9\vec{j} + 6\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 10$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 19$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;2;-1\}$, $\vec{b}\{2;-3;3\}$, $\vec{c}\{1;-1;-1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{2;1;-2\}$.

Варіант 6

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, обчислити $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -3\vec{i} + 9\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 9$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{-2;3;-1\}$, $\vec{b}\{1;-1;1\}$, $\vec{c}\{-1;1;-1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{2;-1;32\}$.

Варіант 7

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, обчислити $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -1\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 15\vec{j} + 10\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 12$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 13$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{-2;-1;2\}$, $\vec{b}\{1;1;-1\}$, $\vec{c}\{1;1;2\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-1;0;-2\}$.

Варіант 8

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, обчислити $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b})$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 14$, $\left|\vec{b}\right| = 18$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 16$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{2;-1;1\}$, $\vec{b}\{-3;2;1\}$, $\vec{c}\{3;-1;-1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{2;0;1\}$.

Варіант 9

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{3}$, обчислити $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 14$, $\left|\vec{b}\right| = 32$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 42$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;1;1\}$, $\vec{b}\{-2;3;-1\}$, $\vec{c}\{1;-1;-1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-2;1;-3\}$.

Варіант 10

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{3}$, обчислити $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 6$, $\left|\vec{b}\right| = 7$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 7$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;-2;1\}$, $\vec{b}\{1;1;3\}$, $\vec{c}\{1;0;-1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{4;-1;2\}$.

Варіант 11

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, обчислити $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 8\vec{j} + 12\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 17$, $|\vec{b}| = 9$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 22$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{-2;-1;1\}$, $\vec{b}\{-1;2;1\}$, $\vec{c}\{1;-2;-1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-1;-3;0\}$.

Варіант 12

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, обчислити $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 16$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 15$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{-1;1;1\}$, $\vec{b}\{-3;-1;2\}$, $\vec{c}\{-2;1;-3\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, й розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{3;2;3\}$.

Варіант 13

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, обчислити $(2\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-3\vec{b})$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 15\vec{j} + 10\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 15$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 23$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{2;1;-1\}$, $\vec{b}\{-2;-1;-1\}$, $\vec{c}\{0;1;-3\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{0;1;-5\}$.

Варіант 14

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, обчислити $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ і $\vec{b}=\alpha\vec{i}+9\vec{j}+6\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{a}-\vec{b}|=9$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;1;1\}$, $\vec{b}\{-1;4;1\}$, $\vec{c}\{-2;4;1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{1;2;2\}$.

Варіант 15

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, обчислити $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=3\vec{i}+9\vec{j}+\beta\vec{k}$ і $\vec{b}=\alpha\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=9$, $|\vec{b}|=13$, $|\vec{a}-\vec{b}|=20$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{2;3;1\}$, $\vec{b}\{1;2;1\}$, $\vec{c}\{-1;-2;1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-2;-5;1\}$.

Варіант 16

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, обчислити $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 11$, $\left|\vec{b}\right| = 13$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 18$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;2;1\}$, $\vec{b}\{-1;1;0\}$, $\vec{c}\{1;-1;-1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{2;4;0\}$.

Варіант 17

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Знаючи, що $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, обчислити $(2\vec{a} + 5\vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b})$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -8\vec{i} + 12\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 13$, $\left|\vec{b}\right| = 9$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 10$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{2;-1;1\}$, $\vec{b}\{-1;2;1\}$, $\vec{c}\{3;3;1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{3;-3;0\}$.

Варіант 18

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, обчислити $(\vec{a} - 5\vec{b})(2\vec{a} + \vec{b})$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 7$, $\left|\vec{b}\right| = 6$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 11$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;-1;-1\}$, $\vec{b}\{-1;2;1\}$, $\vec{c}\{3;-1;1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{5;-2;-1\}$.

Варіант 19

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, обчислити $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 11$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 14$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{2;-1;1\}$, $\vec{b}\{-1;-1;1\}$, $\vec{c}\{-2;-3;1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{2;0;2\}$.

Варіант 20

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, обчислити $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -\vec{i} - 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} - 4\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 11$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 16$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;-1;1\}$, $\vec{b}\{1;2;2\}$, $\vec{c}\{-1;-1;-1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{0;-4;2\}$.

Варіант 21

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, обчислити $(4\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 3\vec{b})$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 10\vec{j} + 15\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 16$, $|\vec{b}| = 7$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 13$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{-2;3;1\}$, $\vec{b}\{1;-3;-1\}$, $\vec{c}\{1;-1;1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{4;3;-3\}$.

Варіант 22

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, обчислити $(\vec{a}-\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b})$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=-2\vec{i}-4\vec{j}+\beta\vec{k}$ і $\vec{b}=\alpha\vec{i}+10\vec{j}+15\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=9$, $|\vec{b}|=17$, $|\vec{a}-\vec{b}|=16$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{-1;-2;1\}$, $\vec{b}\{2;1;2\}$, $\vec{c}\{-1;1;-1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-1;1;1\}$.

Варіант 23

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, обчислити $(\vec{a}-5\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b})$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=-5\vec{i}+10\vec{j}+\beta\vec{k}$ і $\vec{b}=\alpha\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=14$, $|\vec{a}-\vec{b}|=14$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;-1;1\}$, $\vec{b}\{2;1;2\}$, $\vec{c}\{2;2;3\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-1;0;-2\}$.

Варіант 24

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, обчислити $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -\vec{i} + \beta\vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 20$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 26$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;-1;-1\}$, $\vec{b}\{-1;1;1\}$, $\vec{c}\{1;-2;-1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-3;1;3\}$.

Варіант 25

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, обчислити $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = \vec{i} + \beta\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 30$, $|\vec{b}| = 20$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;-1;2\}$, $\vec{b}\{-2;1;1\}$, $\vec{c}\{1;-2;1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-2;2;2\}$.

Варіант 26

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, обчислити $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -4\vec{i} + \beta\vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 12\vec{j} - 4\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{b}| = 7$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 14$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;-1;1\}$, $\vec{b}\{-2;1;1\}$, $\vec{c}\{1;-1;1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-1;0;2\}$.

Варіант 27

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, обчислити $(3\vec{a}-5\vec{b})(\vec{a}+4\vec{b})$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=\vec{i}+\beta\vec{j}+3\vec{k}$ і $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}-9\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=16$, $|\vec{b}|=11$, $|\vec{a}-\vec{b}|=23$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{3;1;1\}$, $\vec{b}\{1;-1;-2\}$, $\vec{c}\{-1;1;1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-1;1;1\}$.

Варіант 28

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, обчислити $(\vec{a}-5\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b})$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=9\vec{i}+\beta\vec{j}+6\vec{k}$ і $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=9$, $|\vec{b}|=8$, $|\vec{a}-\vec{b}|=13$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;2;3\}$, $\vec{b}\{-2;1;-3\}$, $\vec{c}\{1;1;1\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-2;3;5\}$.

Варіант 29

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, обчислити $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -3\vec{i} + \beta\vec{j} + 9\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 11$, $\left|\vec{b}\right| = 8$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 17$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;-1;1\}$, $\vec{b}\{2;2;-1\}$, $\vec{c}\{-1;-2;3\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{4;-1;1\}$.

Варіант 30

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{3}$, обчислити $(2\vec{a} + 3\vec{b})^2$.

2. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = 2\vec{i} + \beta\vec{j} - 6\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$ а) колінеарні, б) перпендикулярні.

3. Обчислити $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 24$, $\left|\vec{b}\right| = 22$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 38$.

4. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, виконуючи умову задачі 4.

5. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;-1;1\}$, $\vec{b}\{-1;3;4\}$, $\vec{c}\{-1;-1;-2\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-2;-2;0\}$.

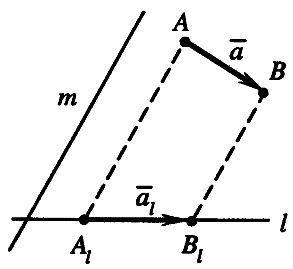
Практичне заняття 2

Афінна система координат. Прямокутна декартова система координат. Скалярний добуток двох векторів, його властивості та застосування.

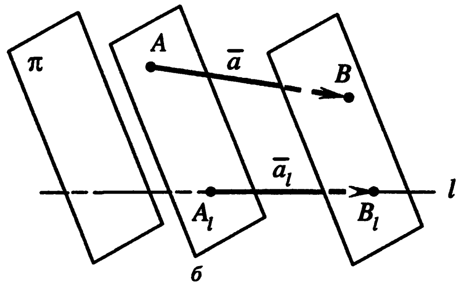
Основні теоретичні відомості

2.1. Проекції векторів на пряму та на площину.

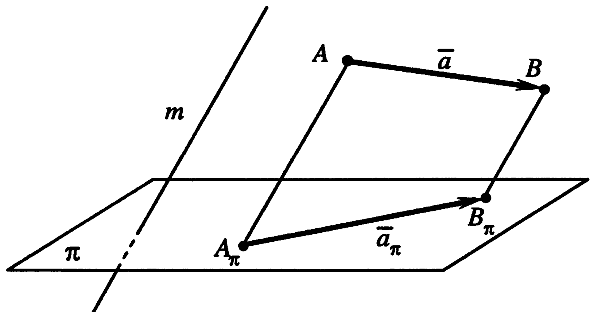
Нехай на площині задано пряму l та пряму m, яка її перетинає. *Проекцією вектора* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, *на пряму* l *паралельно прямій* m (або вздовж прямої m) називається вектор $\overrightarrow{a_l}=\overrightarrow{A_lB_l}$, початком якого є проекція A_l початку A, а кінцем – проекція B_l кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$. Якщо пряма m перпендикулярна прямій l, то проекція називається *ортогональною*.



Нехай в просторі дана пряма l і площина π, яка її перетинає. *Проекцією вектора* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *на пряму* l *паралельно площині* π (або вздовж площини π) називається вектор $\overrightarrow{a_l}=\overrightarrow{A_lB_l}$, початком якого є проекція A_l початку A, а кінцем – проекція B_l кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$. Якщо площина π перпендикулярна прямій l, то проекція називається *ортогональною*.



Нехай в просторі задано площину π і пряму m, яка її перетинає. *Проекцією вектора* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *на площину* π паралельно прямій m (або вздовж прямої m) називається вектор $\overrightarrow{a_\pi}=\overrightarrow{A_\pi B_\pi}$, початком якого є проекція A_π початку A, а кінцем – проекція B_π кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$. Якщо пряма m перпендикулярна площині π, то проекція називається *ортогональною*.



Властивості проекцій векторів:

1. Проекції вектора на паралельні прямі (або на паралельні площини) рівні.
2. Проекції рівних векторів рівні.
3. Проекція суми векторів дорівнює сумі їх проекцій.
4. Проекція добутку вектора на число дорівнює добутку цього числа на проекцію вектора (відношення колінеарних векторів дорівнює відношенню їх проекцій, якщо воно визначене).
5. Проекція лінійної комбінації векторів дорівнює лінійній комбінації їх проекцій.

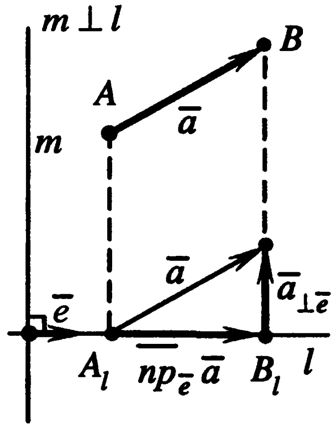
2.2. Ортогональні проекції векторів.

Рухатись вздовж прямої можна в двох напрямках. *Орієнтованою* називається пряма, на якій обрано напрямок, тобто один з напрямків вважається додатнім, а протилежний – від'ємним. Для вимірювання довжин відрізків на прямій задається *масштабний відрізок*, який приймається за одиницю довжини.

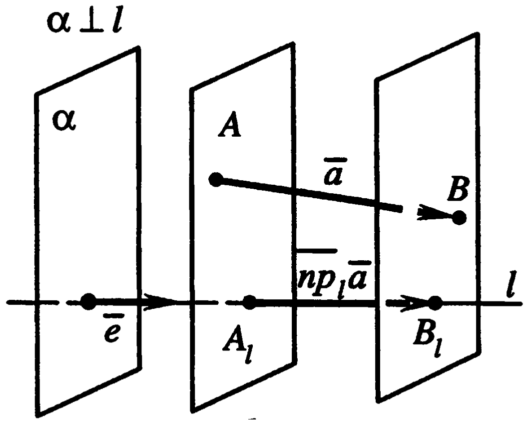
Орієнтована пряма з заданим масштабним відрізком називається *віссю*.

Будь-який ненульовий вектор $\vec{e}$, який лежить на прямій, називається *направляючим вектором* для даної прямої, оскільки задає на ній орієнтацію. Напрямок вектора $\vec{e}$ приймається за додатній, а напрямок протилежного вектора $(-\vec{e})$ – за від'ємний. Довжину вектора $\vec{e}$ можна прийняти за величину масштабного відрізка на цій прямій. Тому можна сказати, що будь-який ненульовий вектор $\vec{e}$ визначає вісь – пряму, яка містить даний вектор, задаючи на ній напрямок та масштабний відрізок.

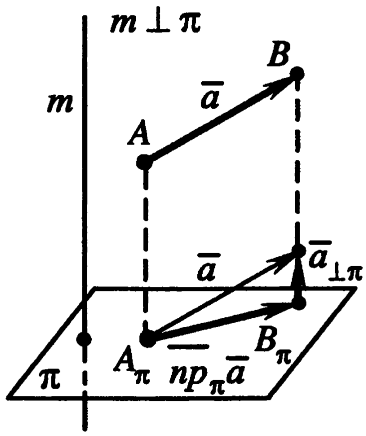
Ортогональною проекцією вектора $\vec{a}$ *на вісь*, яка задається вектором $\vec{e} \neq 0$, називається його проекція на вісь вздовж прямої (або вздовж площини), яка перпендикулярна даній вісі. Ортогональну проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь, яка задається вектором $\vec{e} \neq 0$, позначають $\overrightarrow{np_{\vec{e}}}\vec{a}$.



Ортогональну проекцію вектора $\vec{a}$ *на пряму* l позначають $\overrightarrow{np_l}\vec{a}$.



Ортогональну проекцію вектора $\vec{a}$ *на площину* π позначають $\overrightarrow{np_{\pi}}\vec{a}$.



Різницю між вектором $\vec{a}$ і його ортогональною проекцією називають *ортогональною складовою*:

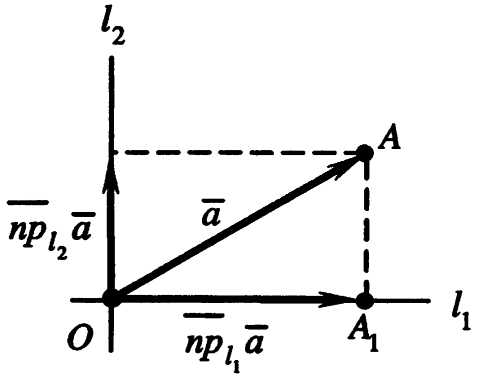
$\overrightarrow{np_{\perp\vec{e}}}\,\vec{a} = \vec{a} - \overrightarrow{np_{\vec{e}}}\,\vec{a}$ – ортогональна складова вектора $\vec{a}$ відносно вектора $\vec{e} \neq 0$;

$\overrightarrow{np_{l}}\,\vec{a} = \vec{a} - \overrightarrow{np_{l}}\,\vec{a}$ – ортогональна складова вектора $\vec{a}$ відносно прямої *l*;

$\overrightarrow{np_{\pi}}\,\vec{a} = \vec{a} - \overrightarrow{np_{\pi}}\,\vec{a}$ – ортогональна складова вектора $\vec{a}$ відносно площини π.

Теорема (про ортогональні проекції вектора).

1. Якщо на площині задано дві взаємно перпендикулярні прямі l_1 та l_2, то будь-який вектор $\vec{a}$ на цій площині можна однозначно представити у вигляді суми його ортогональних проекцій на ці прямі, тобто $\vec{a} = \overrightarrow{np_{l_1}}\,\vec{a} + \overrightarrow{np_{l_2}}\,\vec{a}$.

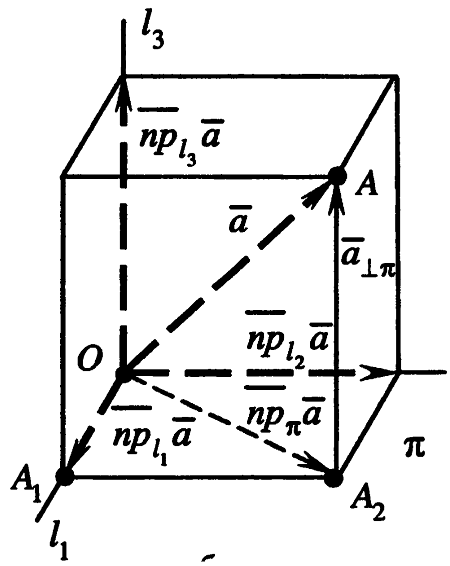


2. Якщо в просторі задано три попарно перпендикулярні прямі l_1, l_2 та l_3, які перетинаються в одній точці, то будь-який вектор $\vec{a}$ в цьому просторі можна однозначно представити у вигляді суми його ортогональних проекцій на ці прямі, тобто $\vec{a} = \overrightarrow{np_{l_1}}\,\vec{a} + \overrightarrow{np_{l_2}}\,\vec{a} + \overrightarrow{np_{l_3}}\,\vec{a}$.

3. Квадрат довжини вектора $\vec{a}$ на площині або в просторі дорівнює сумі квадратів довжин його ортогональних проекцій, тобто

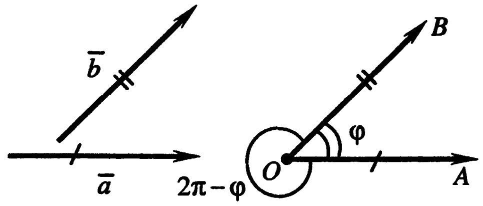
$$\left|\vec{a}\right|^2 = \left|\overrightarrow{np_{l_1}}\,\vec{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{np_{l_2}}\,\vec{a}\right|^2;$$

$$\left|\vec{a}\right|^2 = \left|\overrightarrow{np_{l_1}}\,\vec{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{np_{l_2}}\,\vec{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{np_{l_3}}\,\vec{a}\right|^2$$



2.3. Довжина ортогональної проекції.

Кутом між двома ненульовими векторами називається кут між рівними їм векторами, які мають спільний початок, і який за величиною не більший за π. Нехай на площині нам дано два ненульові вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Побудуємо рівні їм вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ та $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ таким чином, щоб початки співпали в точці *O*.



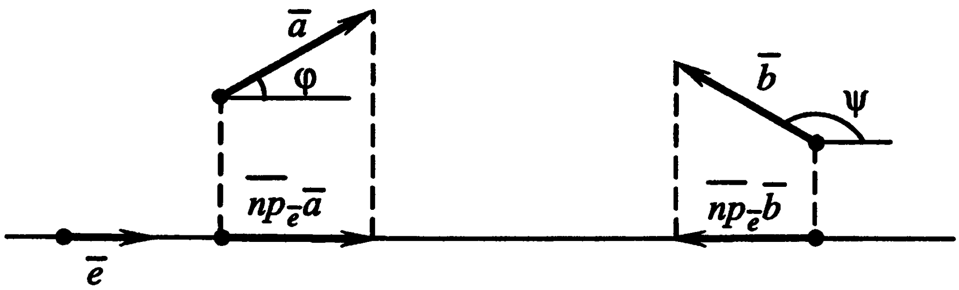
Внаслідок цього отримаємо два кути, менший з яких, величина якого не перевищує π ($0 \le \varphi \le \pi$), вважається кутом між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Якщо хоча б один з двох векторів нульовий, то кут між ними невизначений. Кут між двома ненульовими колінеарними векторами або дорівнює нулю (якщо ці вектори співнапрямлені), або дорівнює π (якщо вектори протилежно напрямлені).

Нехай φ – кут між ненульовим вектором $\vec{a}$ і віссю, яка задається вектором $\vec{e} \neq 0$ (або, що те саме, кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{e}$)

Алгебраїчним значенням довжини ортогональної проекції вектора $\vec{a}$ на вісь, яка задається вектором $\vec{e} \neq 0$, називається довжина його ортогональної проекції $\overrightarrow{np_{\vec{e}}}\vec{a}$, яка береться зі знаком «+», якщо кут φ не перевищує 90^0, і зі знаком «-», якщо кут φ більше 90^0.

$$np_{\bar{e}}\bar{a} = \left|\overline{np_{\bar{e}}\bar{a}}\right| = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\varphi \qquad np_{\bar{e}}\bar{b} = -\left|\overline{np_{\bar{e}}\bar{b}}\right| = \left|\bar{b}\right| \cdot \cos\psi$$

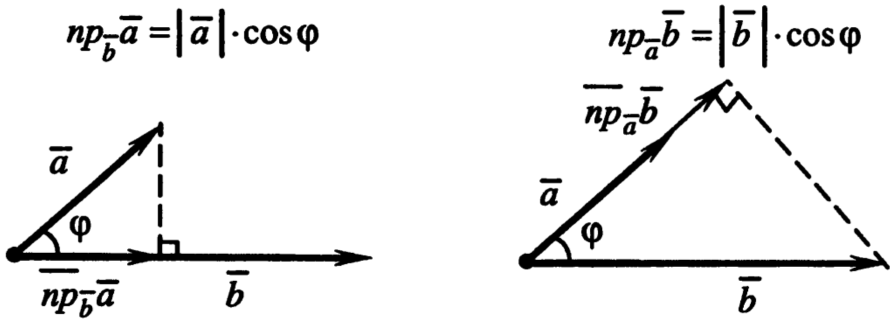


Із визначення алгебраїчного значення довжини ортогональної проекції:

$$\overrightarrow{np_{\vec{e}}}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\varphi$$

Цю рівність можна використовувати як визначення косинуса кута між ненульовими векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (або що те саме, косинуса кута між осями, які задають ненульовими векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$)

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{np_{\vec b}}\,\vec a}{|\vec a|} = \frac{\overrightarrow{np_{\vec a}}\,\vec b}{|\vec b|}.$$



Кутом між ненульовим вектором $\vec a$ і прямою l називається кут φ між вектором $\vec a$ і його ортогональною проекцією $\overrightarrow{np_l}\,\vec a$ на пряму l. Величина кута φ знаходиться за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{np_l}\,\vec a\right|}{|\vec a|}.$$

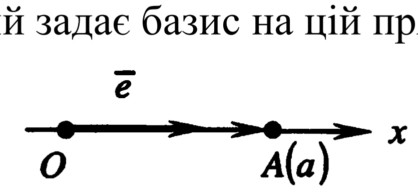
Кутом між ненульовим вектором $\vec a$ та площиною π називається кут ψ між вектором $\vec a$ та його ортогональною проекцією $\overrightarrow{np_\pi}\,\vec a$ на площину π. Величина кута ψ знаходиться за формулою:

$$\cos\psi = \frac{\left|\overrightarrow{np_\pi}\,\vec a\right|}{|\vec a|}.$$

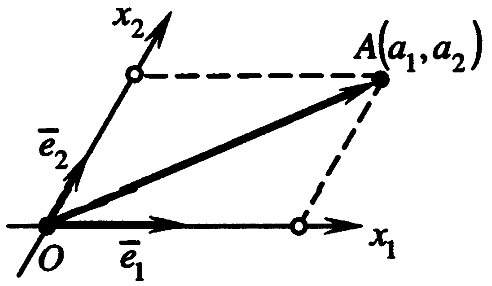
2.4. Афінна система координат.

Нехай в просторі дано фіксовану точку *O*. Сукупність з точки *O* та базису називається *афінною системою координат*. Точка *O* називається *початком координат*.

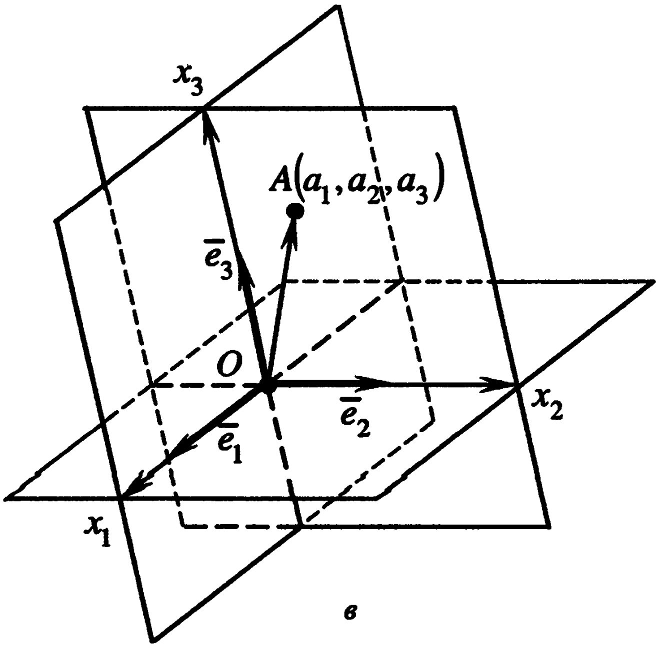
Афінна система координат на прямій – це точка *O* та ненульовий вектор $\vec e$ на прямій, який задає базис на цій прямій.



Афінна система координат на площині – це точка *O* та два неколінеарні вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2}$, які взято в певному порядку, і які задають базис на площині.



Афінна система координат в просторі – це точка O та три некомпланарні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, які взято в певному порядку, і які задають базис в просторі.



в

Прямі, які проходять через початок координат в напрямку базисних векторів, називаються *координатними осями*: Ox_1 – вісь абсцис, Ox_2 – вісь ординат, Ox_3 – вісь аплікат. Площини, які проходять через дві координатні вісі, називаються *координатними площинами*.

Афінна система координат на площині або в просторі називається *правою*, якщо її базис є правим, і *лівою*, якщо її базис – лівий.

Координатами вектора в заданій системі координат зазивають коефіцієнти в розкладі вектора за базисом.

Для будь-якої точки A в заданій афінній системі координат можна розглядати вектор $\overrightarrow{OA}$, початок якого співпадає з початком координат, а кінець – з точкою A. Цей вектор називається *радіус-вектором* точки A.

Координатами точки A в заданій системі координат називаються координати радіус-вектора цієї точки відносно заданого базису. В просторі це координати вектора $\overrightarrow{OA}$ в базисі $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, тобто коефіцієнти a_1, a_2, a_3 в розкладі $\overrightarrow{OA} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2} + a_3 \cdot \vec{e_3}$. Координати точки записують у вигляді $A(a_1; a_2; a_3)$. Перша координата називається абсцисою, друга – ординатою, третя – аплікатою. На площині і на прямій координати точки записують у вигляді $A(a_1; a_2)$ та $A(a)$ відповідно розкладам $\overrightarrow{OA} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2}$ та $\overrightarrow{OA} = a \cdot \vec{e}$.

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$ з початком в точці $A(a_1; a_2; a_3)$ та кінцем в точці $B(b_1; b_2; b_3)$. Розглянемо трикутник OAB. Радіус-вектори $\overrightarrow{OA}$ та $\overrightarrow{OB}$ можна виразити у вигляді $\overrightarrow{OA} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2} + a_3 \cdot \vec{e_3}$ та $\overrightarrow{OB} = b_1 \cdot \vec{e_1} + b_2 \cdot \vec{e_2} + b_3 \cdot \vec{e_3}$. При цьому вектор $\overrightarrow{AB}$ обчислюється як різниця векторів $\overrightarrow{OB}$ та $\overrightarrow{OA}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1) \cdot \vec{e_1} + (b_2 - a_2) \cdot \vec{e_2} + (b_3 - a_3) \cdot \vec{e_3}$$

Тобто, вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати:

$$\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3).$$

Отже, щоб знайти *координати вектора*, потрібно із координат його кінця відняти відповідні координати його початку.

2.4. Ортогональний та ортонормований базиси. Прямокутна декартова система координат.

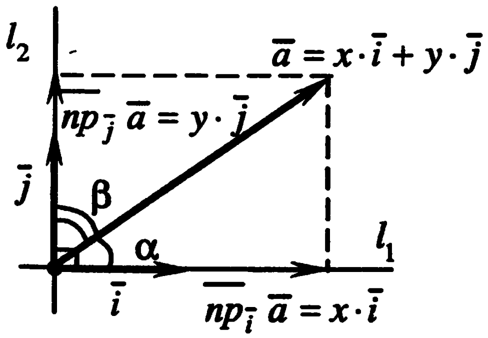
Два вектора називаються *ортогональними* (*перпендикулярними*), якщо кут між ними прямий ($\varphi = \frac{\pi}{2}$, або $\varphi = 90^0$)

Система векторів називається *ортогональною*, якщо всі вектори, які утворюють її, є попарно ортогональними. Система векторів називається *ортонормованою*, якщо вона ортогональна і довжина кожного вектора дорівнює одиниці.

Базиси на прямій, площині та в просторі можуть задаватись неоднозначно. Однак ті з них, які є найбільш зручними при розв'язанні практичних задач, приймаються в якості стандартних.

Стандартний базис на прямій – це одиничний вектор $\vec{i}$ на даній прямій, тобто $|\vec{i}| = 1$. Будь-який вектор $\vec{a}$, колінеарний даній прямій, можна розкласти за стандартним базисом на прямій, тобто представити у вигляді $\vec{a} = x \cdot \vec{i}$.

Стандартний базис на площині – впорядкована двійка одиничних і перпендикулярних векторів $\vec{i}$ та $\vec{j}$ на даній площині (тобто $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ та $\vec{i} \perp \vec{j}$). Будь-який вектор $\vec{a}$ на цій площині можна розкласти за стандартним базисом на площині, тобто представити у вигляді $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.



Стандартний базис в просторі – впорядкована трійка одиничних і попарно перпендикулярних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (тобто $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ та $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$). Будь-який вектор $\vec{a}$ в просторі можна розкласти за стандартним базисом в просторі, тобто представити у вигляді $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.

Стандартні базиси на площині та в просторі ортонормовані, тому вектор $\vec{a}$ можна виразити через суму його ортогональних проекцій на відповідні прямі або координатні вісі, які задаються базисними векторами, тобто

$$a_1 = \overrightarrow{np}_{l_1}\vec{a} = \overrightarrow{np}_{\vec{i}}\vec{a} = x \cdot \vec{i}$$

$$a_2 = \overrightarrow{np}_{l_2}\vec{a} = \overrightarrow{np}_{\vec{j}}\vec{a} = y \cdot \vec{j}$$

$$a_3 = \overrightarrow{np}_{l_3}\vec{a} = \overrightarrow{np}_{\vec{k}}\vec{a} = z \cdot \vec{k}$$

Вектор $\vec{a}$ в просторі можна представити замкнутою ламаною, яка утворена його проекціями:

$$a_1 = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = \overrightarrow{np}_{\vec{i}}\vec{a} + \overrightarrow{np}_{\vec{j}}\vec{a} + \overrightarrow{np}_{\vec{k}}\vec{a}$$

Вектор в просторі є сумою його ортогональних складових відносно координатних площин $\pi_{\vec{i}\vec{j}}, \pi_{\vec{i}\vec{k}}, \pi_{\vec{j}\vec{k}}$:

$$a_1 = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = \overrightarrow{a_{\perp \pi_{\vec{j}\vec{k}}}} + \overrightarrow{a_{\perp \pi_{\vec{i}\vec{k}}}} + \overrightarrow{a_{\perp \pi_{\vec{i}\vec{j}}}}$$

Стандартні базиси на площині та в просторі є правими.

Координати вектора $\vec{a}$ в стандартному базисі дорівнюють алгебраїчним значенням довжин його ортогональних проекцій на координатні вісі:

$$x = \overrightarrow{np}_{\vec{i}}\vec{a}, \; y = \overrightarrow{np}_{\vec{j}}\vec{a}, \; z = \overrightarrow{np}_{\vec{k}}\vec{a}$$

або

$$\vec{a} = \left(\overrightarrow{np}_{\vec{i}}\vec{a}; \overrightarrow{np}_{\vec{j}}\vec{a}; \overrightarrow{np}_{\vec{k}}\vec{a}\right).$$

В ортонормованому базисі довжина вектора дорівнює квадратному кореню з суми квадратів його координат:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ – на площині;}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ – в просторі.}$$

2.5. Направляючі косинуси.

В стандартних базисах на площині та в просторі напрямок ненульового вектора $\vec{a}$ часто характеризують кутами, які він утворює з базисними векторами. При цьому достатньо знати косинуси цих кутів, які називаються *направляючими косинусами вектора* $\vec{a}$.

На площині вектор $\vec{a}$ можна виразити через суму ортогональних проекцій $a = \overrightarrow{np}_{\vec{i}}\vec{a} + \overrightarrow{np}_{\vec{j}}\vec{a}$. Тоді, якщо α – кут між вектором $\vec{a}$ та першим базисним вектором $\vec{i}$, а β – кут між вектором $\vec{a}$ та другим базисним вектором $\vec{j}$, отримуємо:

$$\vec{a} = \overrightarrow{np_{\vec{i}}}\vec{a} + \overrightarrow{np_{\vec{j}}}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} + \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\beta \cdot \vec{j}$$

Поділивши цей вираз на довжину вектора $\vec{a}$, в лівій частині рівності отримуємо одиничний вектор $\vec{e}$, який має однаковий напрямок з вектором $\vec{a}$:

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j}$$

Отже, координати одиничного вектора $\vec{e}$, співнапрямленого з вектором $\vec{a}$ дорівнюють направляючим косинусам вектора $\vec{a}$:

$$\vec{e} = (\cos\alpha; \cos\beta)$$

Величини направляючих косинусів пов'язані умовою:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

В просторі отримуємо аналогічні вирази:

$$\vec{a} = \overrightarrow{np_{\vec{i}}}\vec{a} + \overrightarrow{np_{\vec{j}}}\vec{a} + \overrightarrow{np_{k}}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} + \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\beta \cdot \vec{j} + \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\gamma \cdot \vec{k},$$

де γ – кут між вектором $\vec{a}$ та третім базисним вектором $\vec{k}$,

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$$

Координати одиничного вектора $\vec{e}$, співнапрямленого з вектором $\vec{a}$ дорівнюють направляючим косинусам вектора $\vec{a}$:

$$\vec{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$$

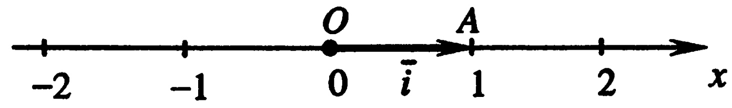
Величини направляючих косинусів пов'язані умовою:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

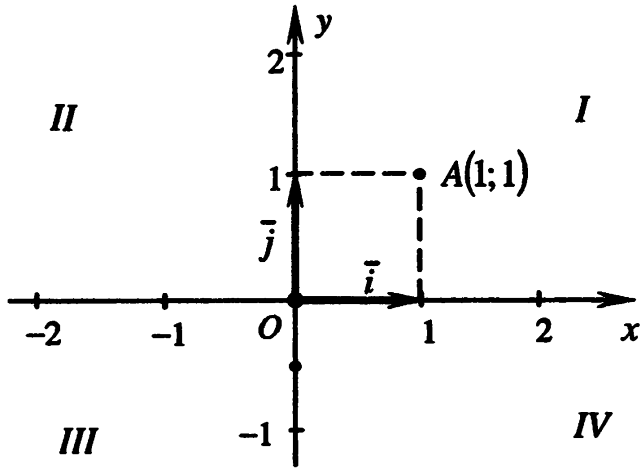
2.5. Прямокутна декартова система координат.

Афінна система координат називається *прямокутною* (*декартовою*) *системою координат*, якщо її базис ортонормований. Обираючи стандартні базиси, отримуємо:

$O\vec{i}$ – *прямокутна система координат на прямій* – це точка O та одиничний вектор $\vec{i}$ на прямій. Точки O та A на координатній осі Ox позначаються $O(0)$ та $A(1)$.

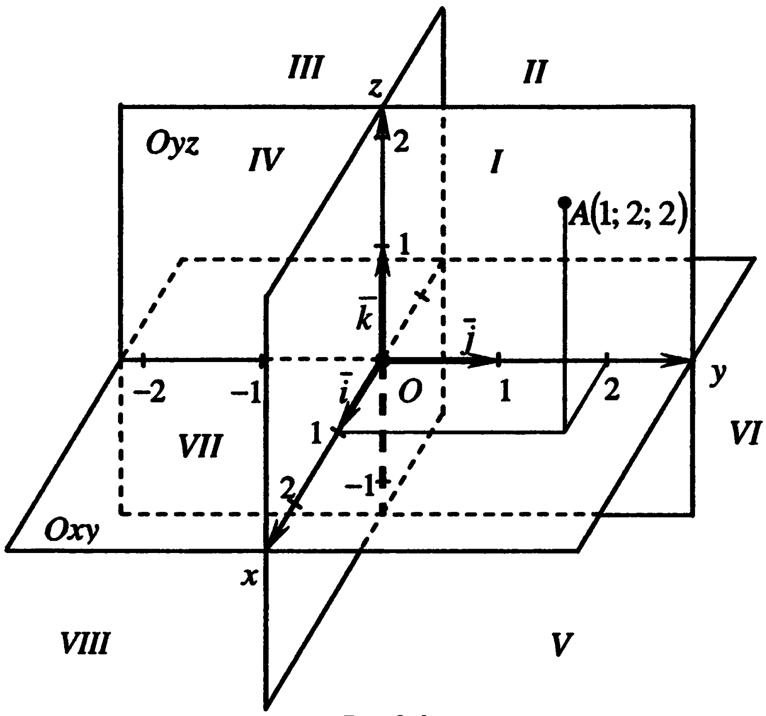


$O\vec{i}\vec{j}$ – *прямокутна система координат на площині* – це точка O та два взаємно перпендикулярних одиничних вектора $\vec{i}$ та $\vec{j}$ на площині, система векторів $\vec{i}$ та $\vec{j}$ – права. Координатні осі Ox (абсцис) та Oy (ординат) розбивають площину на 4 рівні частини, які називають координатними чвертями. Точка $A(1;1)$, наприклад, лежить у першій чверті.



$O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ – *прямокутна система координат в просторі* – це точка O та три попарно перпендикулярних одиничних вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ в просторі, система векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ – права. Координатні осі Ox (абсцис), Oy (ординат) та Oz (аплікат) розбивають простір на 8 октантів. Точка A(1;2;2), наприклад, лежить у 1 октанті.

Прямокутні системи координат позначають також вказуючи початок координат та координатні вісі, наприклад, Ox, Oxy, $Oxyz$.



Координати векторів та точок в прямокутній системі координат називаються *прямокутними координатами*.

Координатами вектора в прямокутній системі координат називаються коефіцієнти в розкладі вектора за стандартним базисом.

Координатами точки A в прямокутній системі координат називаються координати її радіус-вектора $\overrightarrow{OA}$ в стандартному базисі. В просторі це коефіцієнти x, y, z в розкладі $\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, тобто $A(x; y; z)$, на площині – коефіцієнти x, y в розкладі $\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, тобто $A(x; y)$, на прямій – коефіцієнт x в розкладі $\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i}$ тобто $A(x)$.

В прямокутній системі координат відстань AB між точками $A(x_A; y_A; z_A)$ та $B(x_B; y_B; z_B)$ обчислюється за формулами

- в просторі:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- на площині:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

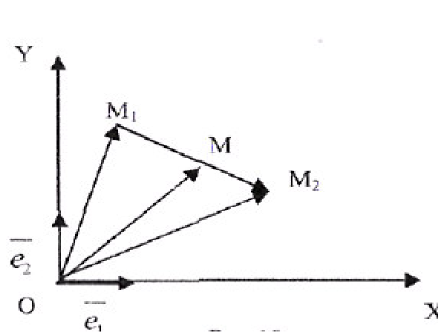
- на прямій:

$$AB = |x_B - x_A|.$$

В окремому випадку, *відстань від точки $A(x_A; y_A; z_A)$ до початку координат $O(0;0;0)$* в просторі дорівнює: $d = AO = \sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2 + z_A{}^2}$.

2.6. Ділення відрізка у даному відношенні.

Нехай точки A та B в афінній системі координат у просторі мають координати: $A(x_A; y_A; z_A)$, та $B(x_B; y_B; z_B)$. Будемо говорити, що *точка $M(x_M; y_M; z_M)$ ділить відрізок AB у відношенні λ,* якщо $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ (де λ – дійсне число, відмінне від -1).



Нам потрібно знайти координати точки M, яка ділить відрізок AB у даному відношенні λ. Розглянемо вектори $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$.

Підставимо останні дві рівності в попередню: $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right)$, або

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB} - \lambda \cdot \overrightarrow{OM},$$
$$\overrightarrow{OM} + \lambda \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Виразивши $\overrightarrow{OM}$ маємо:

$$\overrightarrow{OM} == \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$$

Перейдемо до координат:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda};\ y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda};\ z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}$$

Отже, ми отримали формули для знаходження координат точки, яка ділить відрізок у даному відношенні λ у просторі.

Якщо точки $A(x_A; y_A)$, та $B(x_B; y_B)$ лежать у координатній площині *XOY,* то координати точки $M(x_M; y_M)$, яка ділить відрізок *AB* у даному відношенні λ, знаходяться за формулами:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda};\ y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}.$$

Якщо точка *M* лежить між точками *A* і *B*, то відношення λ, у якому вона поділяє відрізок *AB*, додатне ($\lambda>0$); якщо точка *M* не лежить між точками *A* і *B*, то відношення λ від'ємне ($\lambda<0$); якщо точка *M* співпадає з точкою *A*, то відношення $\lambda=0$.

Якщо точка *M* – середина відрізка *AB*, то $\lambda=1$, і формули для знаходження середини відрізка у просторі мають вигляд:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2};\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2},$$

а на площині:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

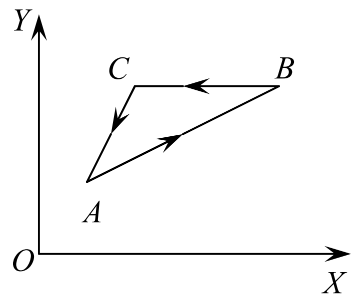
2.6. Площа трикутника на площині.

Площа орієнтованого трикутника на площині з вершинами в точках $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$ обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ми можемо одержати в правій частині як додатне, так і від'ємне значення, в залежності від того, чи буде обхід периметра від вершини *A* до *B* і до *C* відповідати додатному обертанню (проти годинникової стрілки) або від'ємному (за годинниковою стрілкою), тобто якщо розглядати неорієнтований трикутник, то його площу обчислюють за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right\|$$



Точки, які лежать на одній прямій, називаються *колінеарними*.

Якщо три точки на площині колінеарні, то площа трикутника ABC дорівнює нулю, тому *ознака колінеарності* трьох точок на площині має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Координати точки D перетину медіан трикутника ABC *(центр ваги трикутника)* визначаються за формулою:

$$x_D = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},\ y_D = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Центр ваги системи матеріальних точок M_1 і M_2 з масами m_1 і m_2 відповідно знаходиться в точці M, яка здійснює поділ напрямленого відрізка M_1M_2 у відношенні $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$. Якщо в заданій афінній системі координат $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, то координати центра ваги цієї системи визначаються за формулами:

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2},\ y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

2.7. Скалярний добуток векторів.

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута α між ними. Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначають:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha, \text{ або}$$

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha.$$

Скалярний добуток $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos 0=\left|\vec{a}\right|^2$ називається *скалярним квадратом*.

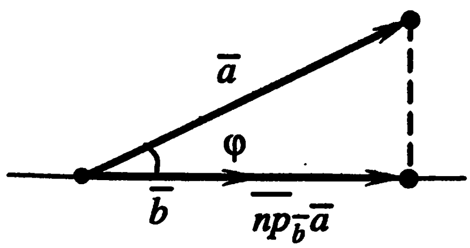
Добуток $\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\alpha$ є алгебраїчним значенням ортогональної проекції вектора $\vec{a}$ на напрямок $\vec{b}$, отже

$$\overrightarrow{np_{\bar{b}}}\,\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\alpha.$$

Помноживши обидві частини рівності на $\left|\vec{b}\right|$, отримаємо:

$$\left|\vec{b}\right|\overrightarrow{np_{\bar{b}}}\,\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha, \text{ або}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot\overrightarrow{np_{\bar{b}}}\,\vec{a}$$



Аналогічно:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\overrightarrow{np_{\bar{a}}}\,\vec{b}$$

Властивості скалярного добутку (для будь-яких векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ та будь-якого дійсного числа λ):

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (комутативність).

2. $\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ (асоціативність відносно скалярного множника).

3. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивність).

4. $\vec{a}\cdot\vec{a}\ge 0$, причому при $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ маємо $\vec{a}=\vec{0}$.

Для будь-яких векторів $\vec{a},\vec{b}$ справедлива нерівність Коші-Буняковського:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)^2\le\left(\vec{a},\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b},\vec{b}\right)$$

З нерівності Коші-Буняковського отримуємо нерівність трикутника (довжина сторони трикутника менше суми двох інших його сторін та більше модуля їх різниці):

$$\left\| \vec{a} \right| - \left| \vec{b} \right\| \le \left| \vec{a} + \vec{b} \right| \le \left| \vec{a} \right| + \left| \vec{b} \right|$$

Геометричні властивості скалярного добутку:

1. Довжина вектора знаходиться за формулою:

$$\left| \vec{a} \right| = \sqrt{\left(\vec{a}, \vec{a} \right)}$$

2. Величина α кута між ненульовими векторами знаходиться за формулою:

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b} \right)}{\left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right|} = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b} \right)}{\sqrt{\left(\vec{a}, \vec{a} \right)} \cdot \sqrt{\left(\vec{b}, \vec{b} \right)}}$$

2.1. Ненульові вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b} \right) = 0$$

2.2. Кут між ненульовими векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ гострий тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток додатній.

2.3. Кут між ненульовими векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ тупий тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток від'ємний.

3. Алгебраїчне значення довжини ортогональної проекції вектора $\vec{a}$ на вісь, яка задається вектором $\vec{b} \neq \vec{0}$:

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b} \right)}{\left| \vec{b} \right|}$$

4. Ортогональна проекція вектора $\vec{a}$ на вісь, яка задається вектором $\vec{b} \neq \vec{0}$:

$$\overrightarrow{np}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b} \right)}{\left(\vec{b}, \vec{b} \right)} \cdot \vec{b}$$

2.8. Скалярний добуток та координати векторів.

Теорема (обчислення скалярного добутку векторів в ортонормованому базисі). В ортонормованому базисі скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат векторів:

якщо два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ відповідно ортонормованого базису на площині мають координати $\vec{a}=\left(x_a;y_a\right)$ та $\vec{b}=\left(x_b;y_b\right)$, то скалярний добуток цих векторів обчислюється за формулою

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b;$$

якщо два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ відповідно ортонормованого базису на площині мають координати $\vec{a}=\left(x_a;y_a;z_a\right)$ та $\vec{b}=\left(x_b;y_b;z_b\right)$, то скалярний добуток цих векторів обчислюється за формулою

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b.$$

Вектори $\vec{a}=\left(x_a;y_a;z_a\right)$ та $\vec{b}=\left(x_b;y_b;z_b\right)$, задані в ортонормованому базисі, взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли

$$x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b=0.$$

У випадку скалярного добутку вектора $\vec{a}=\left(x_a;y_a;z_a\right)$ на себе, маємо формулу для обчислення модуля вектора за його координатами в просторі:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$$

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{x_a\cdot x_a+y_a\cdot y_a+z_a\cdot z_a}=\sqrt{\left(x_a\right)^2+\left(y_a\right)^2+\left(z_a\right)^2}$$

Косинус кута α між ненульовими векторами $\vec{a}=\left(x_a;y_a;z_a\right)$ та $\vec{b}=\left(x_b;y_b;z_b\right)$, заданими в ортонормованому базисі, визначається за формулою:

$$\cos\alpha=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b}{\sqrt{\left(x_a\right)^2+\left(y_a\right)^2+\left(z_a\right)^2}\cdot\sqrt{\left(x_b\right)^2+\left(y_b\right)^2+\left(z_b\right)^2}}$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається проекцією вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, на пряму l паралельно прямій m (або вздовж прямої m)?

2. Що називається проекцією вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на пряму l паралельно площині π (або вздовж площини π)?

3. Що називається проекцією вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на площину π паралельно прямій m (або вздовж прямої m)?

4. Що називається направляючим вектором для даної прямої?

5. Що називається ортогональною проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь, яка задається вектором $\vec{e} \neq 0$?

6. Що називається кутом між двома ненульовими векторами?

7. Які два вектора називаються ортогональними (перпендикулярними)?

8. Що називається афінною системою координат на площині? У чому відмінність афінної системи координат від прямокутної декартової?

9. Що називається радіусом-вектором точки? Чи зміняться радіус-вектори точок, якщо:

а) змінити напрямок координатних осей, залишивши початок без зміни;

б) змінити початок координат, залишивши напрямок осей без зміни?

10. Чи можуть дві різні точки в одній системі координат мати рівні радіус-вектори?

11. Що називається координатами точки в системі координат?

12. Якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то в якому відношенні точка M ділить відрізок BA?

13. Як обчислюють координати точки M, яка ділить відрізок AB?

14. Як обчислюється відстань між двома точками в прямокутній декартовій системі координат?

15. Як обчислюється площа трикутника в прямокутній декартовій системі координат?

16. Що називається скалярним добутком векторів? Сформулюйте основні властивості скалярного добутку векторів.

17. Як знайти скалярний добуток векторів, заданих у координатній формі?

18. Як знайти кут між векторами? Яка умова перпендикулярності двох векторів?

19. Що таке координати вектора? Який геометричний зміст координат вектора в ортонормованому базисі?

20. Яка ознака колінеарності трьох точок на площині?

Методичні вказівки до розв'язання задач

Приклад 1. Як повинні бути зв'язані ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб мало місце співвідношення: 1) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; 2) $\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$?

Розв'язання.

Рівність $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ означає, що довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, рівні. Такий паралелограм є прямокутник, отже, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.

У лівій частині рівності $\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$ записано орт $\overrightarrow{a_0}$ вектора $\vec{a}$, а у правій частині – орт $\overrightarrow{b_0}$ вектора $\vec{b}$. Рівність ортів двох векторів означає їх однакову направленість. Таким чином, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають однакові напрямки.

Приклад 2. Довести, що для того щоб з трьох даних векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ можна було побудувати трикутник, необхідно і достатньо, щоб $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, де $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ - неколінеарні вектори.

Необхідність.
Дано: ABC – трикутник.
Довести: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
Доведення.

З правила трикутника випливає, що $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, але $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$, звідки $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Достатність.
Дано: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ - неколінеарні вектори.
Довести: ABC – трикутник.
Доведення.

$$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}\right) \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}\right) \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\right).$$

Остання рівність означає, що $\overrightarrow{AC}$ є сумою неколінеарних векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$. Отже, ABC – трикутник із сторонами $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$.

Приклад 3. Три сили $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$, прикладені до однієї точки, мають взаємно перпендикулярні напрямки. Визначити величини їх рівнодіючої $\vec{r}$, якщо відомі величини сил: $|\vec{m}| = 2, |\vec{n}| = 10, |\vec{p}| = 11$.

Розв'язання. Так як сили взаємно перпендикулярні, то їх рівнодіюча напрямлена по діагоналі прямокутного паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ як на сторонах, і її величина $|\vec{r}|$ дорівнює довжині цієї діагоналі.

Тоді $|\vec{p}| = \sqrt{|\vec{m}|^2 + |\vec{n}|^2 + |\vec{p}|^2} = \sqrt{4 + 100 + 121} = 15$.

Відповідь: $|\vec{r}| = 15$.

Приклад 4. Дано вектори $\overrightarrow{p_1}$ і $\overrightarrow{p_2}$. Колінеарні чи ні вектори $\overrightarrow{p_1} = \vec{a} - 2\sqrt{3}\vec{b}$ і $\overrightarrow{p_2} = -\sqrt{3}a + 6\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$- неколінеарні вектори?

Розв'язання. В розкладі вектора $\overrightarrow{p_2}$ винесемо за дужку $-\sqrt{3}$:

$\overrightarrow{p_2} = -\sqrt{3}(\vec{a} - 2\sqrt{3}\vec{b})$.

Тоді $\overrightarrow{p_2} = -\sqrt{3}\,\overrightarrow{p_1}$, що свідчить про те, що вектори $\overrightarrow{p_1}$ і $\overrightarrow{p_2}$ колінеарні і протилежно напрямлені.

Відповідь: колінеарні

Приклад 5. З точки O виходять два вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Знайти який-небудь вектор $\overrightarrow{OM}$, який йде по бісектрисі кута AOB.

Розв'язання. Знайдемо орти $\overrightarrow{a_0}$ і $\overrightarrow{b_0}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \overrightarrow{a_0}, \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \overrightarrow{b_0}$, і на них як на сторонах побудуємо ромб. (Рис. 2. 1)

Тоді, так як діагональ ромба поділяє його кути навпіл, вектор $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{b_0}$, або $\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, лежить на бісектрисі кута $\angle AOB$.

Відповідь: $\overline{OM} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

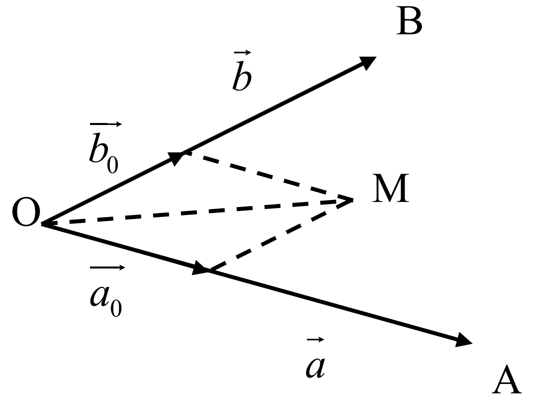


Рис.2.1

Приклад 6. Початок вектора знаходиться в точці $M(4,-3,5)$, кінець – в точці $N(6,-2,3)$. Знайти координати вектора $\overrightarrow{MN}$, його довжину та направляючі косинуси.

Розв'язання. Позначимо координати вектора $\overrightarrow{MN}$ через X, Y, Z. Знаходимо: $X = x_2 - x_1 = 6 - 4 = 2$, $Y = y_2 - y_1 = -2 - (-3) = 1$, $Z = z_2 - z_1 = 3 - 5 = -2$, тобто $\overrightarrow{MN} = \{2,1,-2\}$.

Довжина вектора: $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$.

Знаходимо направляючі косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3}, \cos\beta = \frac{Y}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3}, \cos\gamma = \frac{Z}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\overrightarrow{MN} = \{2,1,-2\}$, $\left|\overrightarrow{MN}\right| = 3$.

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \cos\beta = \frac{1}{3}, \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Приклад 7. Дано вектори $\vec{a} = \{1,1,-1\}$, $\vec{b} = \{2,-1,3\}$, $\vec{c} = \{1,-2,1\}$. Розкласти вектор $\vec{d} = \{12,-9,11\}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Розв'язання: Нехай $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$, α, β, γ - деякі коефіцієнти. Так як рівні вектори мають рівні координати, а координати лінійної комбінації векторів рівні відповідним лінійним комбінаціям однойменних координат, то

$$\begin{cases} 12 = \alpha + 2\beta + \gamma, \\ -9 = \alpha - \beta - 2\gamma, \\ 11 = -\alpha + 3\beta + \gamma. \end{cases}$$ Із системи знайдемо: $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 4$.

Отже, $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$.

Відповідь: $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$.

Приклад 8. Середня лінія трикутника паралельна його третій стороні і її довжина дорівнює половині довжини цієї сторони. Довести це.

Розв'язання. На основі правила трикутника додавання векторів можна записати: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$, де M і N відповідно середини сторін AB і BC (рис. 1). Оскільки $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. З того, що $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, випливає, що $MN \parallel AC$ і $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|$.

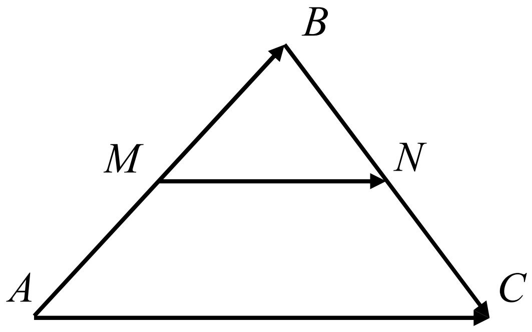


Рис.2.2

Приклад 9. Доведіть, що середини основ трапеції і точка перетину продовжень їх бічних сторін належать одній прямій.

Розв'язання. Нехай M і N – середини відрізків AD і BC (рис. 2). Тоді $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD}\right)$, $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$.

З подібності трикутників ΔSBC і ΔSAD маємо: $\dfrac{\left|\overrightarrow{SA}\right|}{\left|\overrightarrow{SB}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{SD}\right|}{\left|\overrightarrow{SC}\right|}$.

Позначивши величину цього відношення через k, дістанемо: $\left|\overrightarrow{SA}\right|=k\left|\overrightarrow{SB}\right|$, $\left|\overrightarrow{SD}\right|=k\left|\overrightarrow{SC}\right|$. Отже, $\overrightarrow{SA}=k\cdot\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SD}=k\cdot\overrightarrow{SC}$. Тоді: $\overrightarrow{SM}=\dfrac{1}{2}\left(k\cdot\overrightarrow{SB}+k\cdot\overrightarrow{SC}\right)=k\left(\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)\right)$.

Врахувавши рівність $\overrightarrow{SN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$, матимемо: $\overrightarrow{SM}=k\cdot\overrightarrow{SN}$, а з цього слідує, що точки S, M і N лежать на одній прямій.

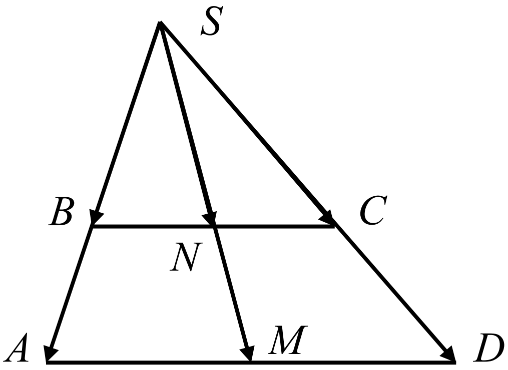


Рис. 2.3

Приклад 10. У трикутнику ABC бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $\dfrac{|BD|}{|CD|}=\dfrac{1}{2}$. В якому відношенні медіана CE ділить цю бісектрису?

Розв'язання. Нехай $[CE]\cap[AD]=O$ і $\dfrac{|AO|}{|OD|}=\dfrac{n}{m}$ (Рис. 2.4).

$\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$; $\overrightarrow{CO}=x\overrightarrow{CE}=\dfrac{x}{2}\overrightarrow{CA}+\dfrac{x}{2}\overrightarrow{CB}$. (1)

$\overrightarrow{CO}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{CA}+\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{CD}$. Оскільки $\overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, то $\overrightarrow{CO}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{CA}+\dfrac{2n}{3(m+n)}\overrightarrow{CB}$. (2)

Прирівнявши коефіцієнти, які стоять при $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$ у рівностях (1) і (2), дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{m+n} = \dfrac{x}{2}, \\ \dfrac{2n}{3(m+n)} = \dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

Почлено поділивши їх, матимемо $\dfrac{3m}{2n} = 1$, або $\dfrac{m}{n} = \dfrac{2}{3}$.

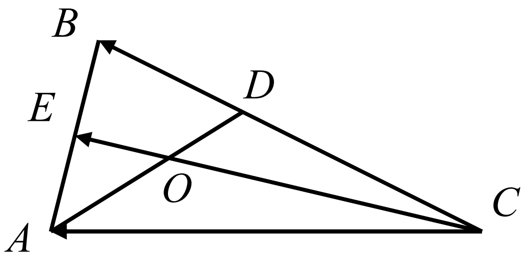


Рис. 2.4

Приклад 11. Точки перетину медіан трикутників ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ збігаються. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ компланарні.

Розв'язання. Вибравши довільну точку O простору і застосувавши для точок M_1 і M_2 формулу точки перетину медіан трикутників ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ відповідно дістанемо: $\overrightarrow{OM_1} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}\right)$, $\overrightarrow{OM_2} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. Якщо почлено віднімемо ці рівності, то матимемо: $\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}\right) = \vec{0}$, або $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$, тобто вектори $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ компланарні.

Приклад 12. Обчислити скалярний добуток векторів $3\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ і $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 4$.

Розв'язання. Відповідно до властивостей скалярного добутку, векторні багаточлени можна перемножувати за правилами множення алгебраїчних багаточленів. Тоді:

$$(3\vec{a}-2\vec{b},\vec{a}+2\vec{b})=(3\vec{a},\vec{a})+(-2\vec{b},\vec{a})+(3\vec{a},2\vec{b})+(-2\vec{b},\vec{b})=$$

$$=(3\vec{a},\vec{a})-(2\vec{b},\vec{a})+(6\vec{a},\vec{b})-(4\vec{b},\vec{b})=3\left|\vec{a}\right|^2+4(\vec{a},\vec{b})-4\left|\vec{b}\right|^2=$$

$$=3\cdot 3^2+4\cdot 3\cdot 4\cdot\cos\frac{2\pi}{3}-4\cdot 4^2=-61$$

Відповідь: -61.

Приклад 13. Трикутник ABC задано векторами $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Виразити через вектори $\vec{c},\vec{b}$ вектор $\vec{h}$, напрямлений по висоті AH. (Рис. 2.5)

Розв'язання. Так як вектор $\overrightarrow{BH}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, то $\overrightarrow{BH}=\lambda(\vec{c}-\vec{b})$.

$\vec{h}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\vec{b}+\overrightarrow{BH}$.

Тоді $\vec{h}=\vec{b}+\lambda(\vec{c}-\vec{b})$.

Для знаходження величини λ скористаємося перпендикулярністю векторів $\overrightarrow{AH}$ і $\overrightarrow{BC}$.

Так як ці вектори перпендикулярні, то $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right)=0$, або

$(\vec{b}+\lambda(\vec{c}-\vec{b}),\vec{c}-\vec{b})=0$.

Розкриваючи скалярний добуток, одержимо $(\vec{b},\vec{c}-\vec{b})+\lambda(\vec{c}-\vec{b})^2=0$,

Звідки $\lambda=\dfrac{(\vec{b},\vec{b}-\vec{c})}{\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2}$.

Підставляючи значення λ у вираз $\vec{h}$, остаточно одержуємо

$$\vec{h}=\vec{b}+\frac{(\vec{b},\vec{b}-\vec{c})}{\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2}(\vec{c}-\vec{b}).$$

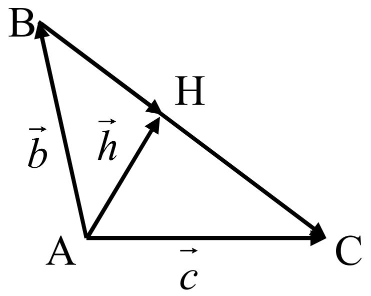


Рис.2.5

Відповідь: $\vec{h} = \vec{b} + \dfrac{(\vec{b}, \vec{b} - \vec{c})}{\left|\vec{c} - \vec{b}\right|^2}(\vec{c} - \vec{b})$.

Приклад 14. Обчислити величину кута між векторами $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} + 5\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Розв'язання 1. За відомою формулою маємо: $\cos\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right) = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{q}\right|}$.

Так як вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори, то $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Тому: $\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \left(3\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} + 5\vec{b}\right) = 3 \cdot \left|\vec{a}\right|^2 + 2\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + 15\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + 10 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 =$

$= 3 + 2 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 10 = 13$

$$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{\left(\vec{p}, \vec{p}\right)} = \sqrt{\left(3\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} + 2\vec{b}\right)} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\left|\vec{q}\right| = \sqrt{\left(\vec{q}, \vec{q}\right)} = \sqrt{\left(\vec{a} + 5\vec{b}, \vec{a} + 5\vec{b}\right)} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$\cos\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right) = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ і } \left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Розв'язання 2. Якщо одиничні взаємно перпендикулярні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ прийняти за координатні орти прямокутної декартової системи координат Oxy, то у цій системі координат вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ будуть мати наступні координати: $\vec{p}\{3; 2\}$, $\vec{q}\{1; 5\}$.

$$\text{Тоді : } \cos\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right) = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 5}{\sqrt{3^3 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ і } \left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Приклад 15. Дано чотирикутник з вершинами $A(7;-8;4)$, $B(7;4;-2)$, $C(-5;10;-2)$ та $D(-5;-2;4)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Для доведення достатньо знайти координати векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$, виразити їх скалярний добуток в координатах та переконатися у виконанні рівності $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ чи $X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$. Знаходимо: $\overrightarrow{AC}=\{-12;18;-6\}$, $\overrightarrow{BD}=\{-12;-6;6\}$.

Так як $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(-12)(-12)+18(-6)+(-6)6=144-108-36=0$, то $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$, що і треба було довести.

Приклад 16. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{m}$ та $\vec{n}$, якщо відомо, що вектори $\vec{p}=3\vec{m}+6\vec{n}$ і $\vec{q}=10\vec{m}-8\vec{n}$ взаємно перпендикулярні?

Розв'язання. Оскільки $\vec{p}\perp\vec{q}$, то $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$. Знайдемо вираз для скалярного добутку, користуючись його властивостями:

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\left(3\vec{m}+6\vec{n}\right)\left(10\vec{m}-8\vec{n}\right)=30\vec{m}^{\,2}-24\vec{m}\vec{n}+60\vec{n}\vec{m}-48\vec{n}^{\,2}.$$

За умовою $\left|\vec{m}\right|=1,\left|\vec{n}\right|=1$, тому $\vec{m}^{\,2}=1,\vec{n}^{\,2}=1$. Далі, за означенням $\vec{m}\vec{n}=\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\cos\varphi$, φ шуканий кут між векторами $\vec{m}$ та $\vec{n}$. Звідси,

$\vec{p}\vec{q}=30-24\cos\varphi+60\cos\varphi-48=0$, $\quad 36\cos\varphi-18=0$ чи $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$

звідси $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Відповідь: $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$**.**

Приклад 17. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB=BC=8\,см$ і точка E ділить бічну сторону AB у відношенні $7:3$(рахуючи від вершини B). Знайти кут між векторами $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CE}$, якщо $AC=12\,см$.

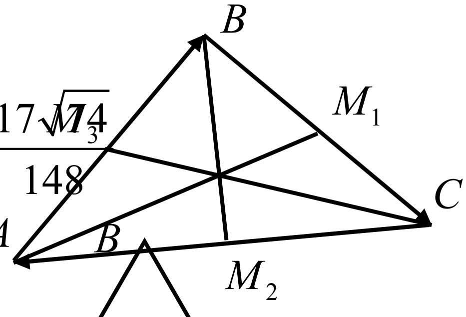
Розв'язання.

Нехай $\angle\left(\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CE}\right)=\alpha$. Для його знаходження скористаємось формулами $\cos(\vec{a}\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ та $\cos(\vec{a}\vec{b})=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$, які вимагають вираження $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CE}$ через інші та знаходження їх координат.

Для цього введемо прямокутну систему координат так. За початок координат O візьмемо середину основи AC рівнобедреного трикутника ABC, за вісь Ox пряму, що містить цю основу і має напрям пів прямої AC. Тоді вершина B трикутника належить осі Oy (рисунок виконати самостійно). За властивістю висоти рівнобедреного трикутника $OA=OC$. Із прямокутного трикутника OBC маємо $OB=\sqrt{BC^2-OC^2}=\sqrt{BC^2-\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$, тому $B(0;2\sqrt{7})$. Оскільки $\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{10}\overrightarrow{AB}$ (за умовою), то $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{3}{10}\overrightarrow{AB}$. В системі xOy маємо: $\overrightarrow{CA}\{-12;0\}$, $\overrightarrow{AB}\left\{6;2\sqrt{7}\right\}$. Тому $\overrightarrow{CE}\left\{-\dfrac{51}{5};\dfrac{3\sqrt{7}}{5}\right\}$.

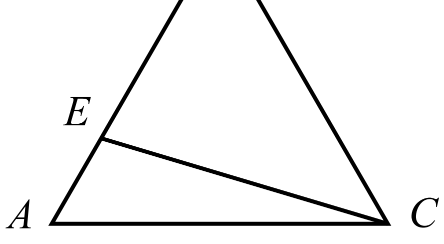
Використавши формули, знаходимо:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CE}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CE}\right|}=\frac{-12\left(-\dfrac{51}{5}\right)+0\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{5}}{\sqrt{12^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{51}{5}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2}}=\frac{17\sqrt{74}}{148}$$



.

Відповідь: $\alpha=\arccos\dfrac{17\sqrt{74}}{148}$.



Приклад 18. Довести, що сума

квадратів медіан довільного трикутника дорівнює $3/4$ суми квадратів довжин його сторін.

Дано: ΔABC. $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. $BM_1 = M_1C$, $CM_2 = M_2A$, $AM_3 = M_3B$. $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{m_a}$, $\overrightarrow{BM_2} = \overrightarrow{m_b}$, $\overrightarrow{CM_3} = \overrightarrow{m_c}$.

Довести: $\overrightarrow{m_a}^2 + \overrightarrow{m_b}^2 + \overrightarrow{m_c}^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

Доведення.

Векторизуємо ΔABC. Нехай $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$. Тоді $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Виразимо вектори, що співпадають з медіанами через вектори сторін: $\overrightarrow{m_a} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$; $\overrightarrow{m_b} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{m_c} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Піднесемо до квадрату кожну з рівностей: $\overrightarrow{m_a}^2 = \vec{c}^2 + \vec{c}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{a}^2$; $\overrightarrow{m_b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b}^2$; $\overrightarrow{m_c}^2 = \vec{b}^2 + \vec{b}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{c}^2$.

Враховуючи, що $\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2$ і додавши почленно отримані рівності, одержимо: $\overrightarrow{m_a}^2 + \overrightarrow{m_b}^2 + \overrightarrow{m_c}^2 = \frac{5}{4}\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{5}{4}\left|\vec{b}\right|^2 + \frac{5}{4}\left|\vec{c}\right|^2 + \left(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}\right)$.(*)

Піднесемо до квадрату рівність $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, одержимо: $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a} = 0$, $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}\right) = 0$, $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} = -\frac{1}{2}\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2\right)$.

Підставивши у (*), одержимо:

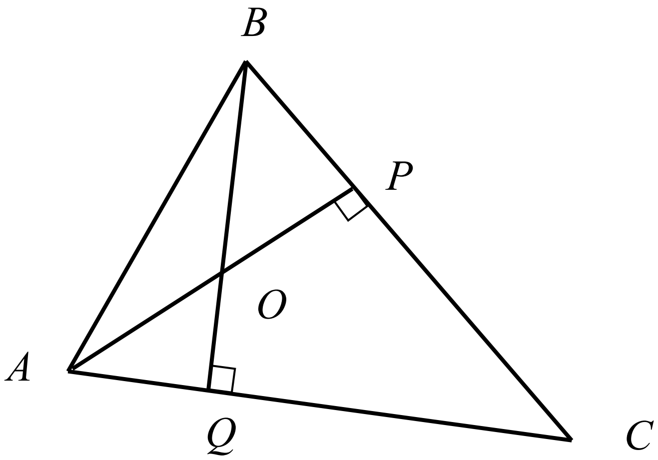
$$\overrightarrow{m_a}^2 + \overrightarrow{m_b}^2 + \overrightarrow{m_c}^2 = \frac{5}{4}\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{5}{4}\left|\vec{b}\right|^2 + \frac{5}{4}\left|\vec{c}\right|^2 - \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2\right),$$

$$\overrightarrow{m_a}^2 + \overrightarrow{m_b}^2 + \overrightarrow{m_c}^2 = \frac{3}{4}\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{3}{4}\left|\vec{b}\right|^2 + \frac{3}{4}\left|\vec{c}\right|^2,$$

$\overrightarrow{m_a}^2+\overrightarrow{m_b}^2+\overrightarrow{m_c}^2=\frac{3}{4}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2\right)$ – те, що й треба було довести.

Приклад 19. Довести, що висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці.

Розв'язання.

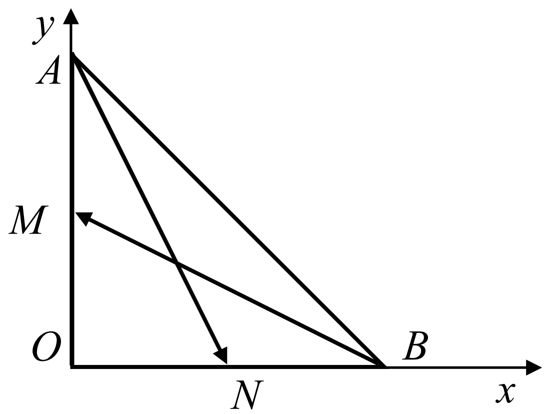


Нехай $AP\perp BC$, $BQ\perp CA$, де AP і BQ – висоти ΔABC і O – точка їх перетину. Позначимо $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ і $Z=OC\bigcap AB$. За означенням різниці векторів $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$. $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}\Rightarrow\vec{a}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=0$, тобто

$\vec{a}\vec{c}=\vec{a}\vec{b}$. (1)

Аналогічно

$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CA}\Rightarrow\vec{b}\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=0\Rightarrow\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{c}$. (2)



Із (1) і (2) випливає $\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}$, тобто $\vec{c}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$. Звідси маємо, що $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$. Отже, CZ – висота ΔABC, тобто третя висота проходить через точку перетину двох інших висот трикутника.

Приклад 20. Довести, що косинус кута між медіанами катетів рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює $-\frac{4}{5}$.

Розв'язання.

Нехай задано рівнобедрений прямокутний трикутник ΔOAB ($OA = OB = a$), точки M і N – відповідно середини катетів OA і OB. Розмістимо цей трикутник у прямокутну систему координат так, щоб точка O збігалась з початком координат, а катети OA і OB лежали на відповідних осях координат Ox і Oy.

Тоді в цій системі координат матимемо: $A(a;O)$, $B(O;a)$, $M\left(\frac{a}{2};O\right)$, $N\left(O;\frac{a}{2}\right)$. Вектори, які збігаються з медіанами, матимуть координати $\overrightarrow{AN}\left\{-a;\frac{a}{2}\right\}$ і $\overrightarrow{BM}\left\{\frac{a}{2};-a\right\}$. Кут між медіанами – це кут між векторами $\overrightarrow{AN}$ і $\overrightarrow{BM}$, який знайдемо за формулою $\cos(\vec{a}\vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$:

$$\cos(\overrightarrow{AN}\overrightarrow{BM}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{-\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{-a^2}{\frac{5}{4}a^2} = -\frac{4}{5},$$ що і треба було довести.

Вправи для аудиторної і самостійної роботи

1. Нехай ABC – довільний трикутник, а E і P – середини сторін AB і BC. Виразити вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ через $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AP}$.
2. Нехай $ABCD$ – паралелограм, E і F – середини протилежних сторін BC і AD, а O – точка перетину діагоналей. Прийнявши вектори $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{e_1}$ і $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{e_2}$ за базисні, визначити координати наступних векторів:

   а) $\overrightarrow{AC}$; *б)* $\overrightarrow{OD}$; *в)* $\overrightarrow{FC}$; *г)* $\overrightarrow{BC}$; *д)* $\overrightarrow{EO}$; *е)* $\overrightarrow{BD}$; *ж)* $\overrightarrow{EA}$.
3. Вектор $\vec{x}$ колінеарний вектору $\vec{a} = \{6;-8;-7,5\}$ і утворює гострий кут з віссю Oz. Знаючи, що $|\vec{x}| = 50$, знайти його координати.

4. Знайти проекцію вектора $\vec{s}=\left\{\sqrt{2};-3;-5\right\}$ на вісь, яка створює з координатними осями Ox, Oz кути $\alpha=45^0$, $\gamma=60^0$, а з віссю Oy – гострий кут β.
5. Дано дві точки $M\left(-5;7;-6\right)$ та $N\left(7;-9;9\right)$. Знайти проекцію вектора $\vec{a}=\left\{1;-3;1\right\}$ на вісь вектора $\overrightarrow{MN}$.
6. На площині дано вектори $\vec{a}=\left\{-1;5\right\}$, $\vec{b}=\left\{3;5\right\}$, $\vec{c}=\left\{-2;8\right\}$, $\vec{d}=\left\{3;1\right\}$ Обчислити: *а)* $\vec{a}\vec{b}$; *б)* $\vec{a}\vec{c}$; *в)* $\sqrt{\vec{d}^2}$; *г)* $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{c}-\vec{d}\right)$.
7. Знайти скалярний добуток векторів $3\vec{a}-2\vec{b}$ і $5\vec{a}-6\vec{b}$, якщо $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=6$ і кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\dfrac{\pi}{3}$.
8. Який кут утворюють між собою ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектор $\vec{a}+3\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $7\vec{a}-5\vec{b}$, а вектор $\vec{a}-4\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $7\vec{a}-2\vec{b}$?
9. Обчислити довжини діагоналей паралелограма $ABCD$, якщо відомо, що $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+3\vec{b}$, де $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.
10. Дано одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які задовольняють умові $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Обчислити $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$.
11. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно утворюють один з одним кути, кожний з яких дорівнює 60^0. Знаючи, що $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=2$ і $\left|\vec{c}\right|=6$, визначити модуль вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
12. Довести, що вектор $\vec{p}=\vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\vec{b}\right)$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.
13. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right|=1$, обчислити кут α між векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.
14. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ у кожному з наступних випадків:

1) $\left|\vec{a}\right|=2,\ \left|\vec{b}\right|=5,\ \varphi=0$; 2) $\left|\vec{a}\right|=7,\ \left|\vec{b}\right|=9,\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}$; 3) $\left|\vec{a}\right|=6,\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{2},\ \varphi=\dfrac{3\pi}{4}$.

15. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні; вектор $\vec{c}$ утворює

з ними кути, рівні $\dfrac{\pi}{3}$; знаючи, що $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 5$ і $\left|\vec{c}\right| = 8$, знайти:
1) $\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right)\left(\vec{b} + 3\vec{c}\right)$; 2) $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2$; 3) $\left(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right)^2$.

16. Дано три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які задовольняють умову $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Знаючи, що $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 1$ і $\left|\vec{c}\right| = 4$, знайти $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c}$.

17. Дано, що $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 5$. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярні.

18. Знайти тупий кут, який утворено медіанами, проведеними з вершин гострих кутів рівнобедреного прямокутного трикутника.

19. Дано вектори $\vec{a} = \{4; -2; -4\}$ та $\vec{b} = \{6; -3; 2\}$. Знайти: 1)$\vec{a}\vec{b}$; 2)$\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$; 3)$\sqrt{\vec{b}^{\,2}}$; 4)$\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right)\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$; 5)$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$; 6)$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2$.

20. Знайти косинус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{2; -4; 4\}$ та $\vec{b} = \{-3; 2; 6\}$.

21. Дано чотирикутник, у якого діагоналі точкою перетину поділяються навпіл. Довести, що цей чотирикутник – паралелограм.

22. Довести, що катет прямокутного трикутника є середнє пропорційне між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу.

23. Довести, що в прямокутному трикутнику висота, проведена з вершини прямого кута на гіпотенузу, є середнє пропорційне між відрізками, на які основа висоти ділить гіпотенузу.

24. Довести, що у довільному чотирикутнику середні лінії, перетинаючись, діляться навпіл.

25. Довести, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

26. Довести, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів всіх його сторін.

27. Довести, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів її непаралельних сторін і подвоєного добутку основ.

28. Довести, що сума квадратів діагоналей чотирикутника дорівнює подвоєній сумі квадратів відрізків, які сполучають середини його протилежних сторін.

29. Знайти в кубі величину кута: 1) між діагоналлю куба і

діагоналлю грані, яка з нею перетинається; 2) між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.

30. Знайти величину кута при вершині рівнобедреного трикутника, знаючи, що медіани, які проведені до бічних сторін, перпендикулярні.

Відповіді:

1. $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}, \overrightarrow{BC} = 2\left(\vec{b} - 2\vec{a}\right), \overrightarrow{AC} = 2\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$;

2. $a)\ \{1;1\}$; $б)\ \left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$; $в)\ \left\{1;\frac{1}{2}\right\}$; $г)\ \{1;0\}$; $д)\ \left\{-\frac{1}{2};0\right\}$;

$е)\ \{-1;1\}$; $ж)\ \left\{-1;-\frac{1}{2}\right\}$. **3.** $\vec{x} = \{-24;32;30\}$. **4.** -3. **5.** 3. **6.** $а)22; б)42; в)\sqrt{10}; г)20$. **7.** -96. **8.** $\varphi_1 = 60^0$, $\varphi_2 = 120^0$. **9.** $\sqrt{133}; 7$. **10.** $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} = -\frac{3}{2}$. **12.** $\left|\vec{p}\right| = 10$. **14.** $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. **15.** $1)10; 2)0; 3)-6$. **16.** $1)-62,\ 2)162,\ 3)373$. **17.** $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c} = -13$. **18.** $\alpha = \pm\frac{3}{5}$ **19.** $\varphi = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$. **20.** 1) 22; 2) 6; 3) 7; 4) –200; 5) 129; 6) 41. **21.** $\cos\varphi = \frac{5}{21}$. **30.** 1) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{\pi}{3}$. **31.** $\arccos\frac{4}{5}$.

Індивідуальне завдання 2
Вектори

Варіант 1

1. Дано точки $A(3;-1;2)$ і $B(-1;2;1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{3;-2;-5\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2;-3;5)$ в точку $B(-3;2;1)$.
4. Дано точки $A(-2;3;-4)$, $B(3;2;5)$, $C(1;-1;2)$, $D(3;2;-4)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(2;-3;2)$, $B(3;5;7)$, $C(4;1;6)$.

Варіант 2

1. Дано точки $A(1;4;2)$ і $B(-2;3;1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;1;3)$, $B(1;3;1)$, $C(0;4;4)$, $D(3;3;3)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{-5;4;0\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(0;3;1)$ в точку $B(3;0;5)$.
4. Дано точки $A(0;2;-5)$, $B(4;3;2)$, $C(0;0;-3)$, $D(4;0;-3)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(1;-2;-3)$, $B(2;6;2)$, $C(3;2;1)$.

Варіант 3

1. Дано точки $A(-3;1;-2)$ і $B(1;-2;-1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;2;1)$, $B(1;1;2)$, $C(1;3;0)$, $D(1;2;3)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.

3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F} = \{-5; 2; 5\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(0;2;2)$ в точку $B(1;4;0)$.
4. Дано точки $A(0;5;-2)$, $B(1;4;1)$, $C(0;1;-4)$, $D(4;5;-4)$. Обчислити проекцію $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(1;-2;1)$, $B(3;2;5)$, $C(2;6;6)$.

Варіант 4

1. Дано точки $A(3;-1;2)$ і $B(2;4;1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;3;0)$, $B(0;1;1)$, $C(3;1;0)$, $D(1;2;3)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F} = \{-5; 1; 4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2;5;2)$ в точку $B(2;4;4)$.
4. Дано точки $A(0;0;0)$, $B(0;4;1)$, $C(4;4;-4)$, $D(4;5;-4)$. Обчислити проекцію $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(1;-4;1)$, $B(2;4;6)$, $C(3;0;5)$.

Варіант 5

1. Дано точки $A(5;2;-1)$ і $B(2;-2;2)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;4;1)$, $B(4;1;3)$, $C(2;3;3)$, $D(3;2;4)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F} = \{5; 0; 0\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-5;0;0)$ в точку $B(0;1;2)$.
4. Дано точки $A(-1;3;-1)$, $B(4;4;2)$, $C(0;4;-2)$, $D(0;4;-4)$. Обчислити проекцію $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(1;1;0)$, $B(2;9;5)$, $C(3;5;4)$.

Варіант 6

1. Дано точки $A(3;-3;2)$ і $B(1;1;1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;1;2)$, $B(2;3;4)$, $C(1;3;1)$, $D(4;0;1)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;5;4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-4;3;1)$ в точку $B(-4;4;5)$.
4. Дано точки $A(-1;4;-1)$, $B(3;1;5)$, $C(2;3;-3)$, $D(2;3;-4)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(-2;1;1)$, $B(-1;7;6)$, $C(0;3;5)$.

Варіант 7

1. Дано точки $A(2;5;1)$ і $B(-2;-4;2)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;4;2)$, $B(2;0;1)$, $C(1;3;4)$, $D(3;0;1)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;-4;0\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-2;5;-5)$ в точку $B(-2;2;3)$.
4. Дано точки $A(1;-2;3)$, $B(5;1;0)$, $C(0;3;4)$, $D(-2;3;4)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(1;-2;1)$, $B(2;6;6)$, $C(3;2;5)$.

Варіант 8

1. Дано точки $A(1;-3;2)$ і $B(3;-2;-1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;0;2)$, $B(1;4;4)$, $C(1;4;2)$, $D(4;4;1)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;-5;4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-4;4;-5)$ в точку $B(-4;0;1)$.

4. Дано точки $A(1;2;0)$, $B(-3;0;0)$, $C(0;-1;5)$, $D(1;-1;5)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(3;-3;-3)$, $B(4;5;2)$, $C(5;1;1)$.

Варіант 9

1. Дано точки $A(-3;-1;2)$ і $B(2;-1;-1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;1;2)$, $B(1;4;4)$, $C(3;3;2)$, $D(3;2;0)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\overrightarrow{F}=\{5;-2;5\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-1;0;-5)$ в точку $B(-2;3;4)$.
4. Дано точки $A(1;3;4)$, $B(-2;1;5)$, $C(3;-4;5)$, $D(1;-1;5)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(4;1;-1)$, $B(5;9;4)$, $C(6;5;3)$.

Варіант 10

1. Дано точки $A(4;2;1)$ і $B(-2;-1;-1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;3;3)$, $B(2;0;4)$, $C(1;1;2)$, $D(4;2;0)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\overrightarrow{F}=\{5;-3;3\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(1;5;0)$ в точку $B(3;3;-5)$.
4. Дано точки $A(1;5;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(2;0;3)$, $D(3;0;5)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(3;3;-1)$, $B(4;11;4)$, $C(5;7;3)$.

Варіант 11

1. Дано точки $A(5;-3;1)$ і $B(2;-3;-1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;1;3)$, $B(0;0;0)$, $C(2;0;0)$, $D(1;1;0)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\overrightarrow{F}=\{5;-4;2\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2;4;-3)$ в точку $B(4;3;0)$.
4. Дано точки $A(1;5;5)$, $B(-4;4;0)$, $C(1;-3;3)$, $D(0;-5;5)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(3;-1;-1)$, $B(4;7;4)$, $C(5;3;3)$.

Варіант 12

1. Дано точки $A(3;1;2)$ і $B(0;-2;1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;0;4)$, $B(3;3;0)$, $C(4;0;1)$, $D(4;0;1)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\overrightarrow{F}=\{5;-3;4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(0;0;-2)$ в точку $B(2;0;-4)$.
4. Дано точки $A(1;2;5)$, $B(-2;4;1)$, $C(3;-2;1)$, $D(3;-4;0)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(-1;-3;0)$, $B(0;5;5)$, $C(1;1;4)$.

Варіант 13

1. Дано точки $A(2;0;-3)$ і $B(-3;-3;2)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;4;2)$, $B(0;0;1)$, $C(1;4;2)$, $D(0;4;1)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\overrightarrow{F}=\{5;-3;1\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2;3;-5)$ в точку $B(2;1;-1)$.

4. Дано точки $A(1;2;4)$, $B(-3;2;2)$, $C(1;-4;2)$, $D(1;-4;0)$. Обчислити проекцію $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(-1;-2;-5)$, $B(0;6;0)$, $C(1;2;-1)$.

Варіант 14

1. Дано точки $A(-4;2;-1)$ і $B(0;0;1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;2;2)$, $B(1;2;3)$, $C(1;4;4)$, $D(0;4;1)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;5;-5\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2;-3;2)$ в точку $B(0;5;2)$.
4. Дано точки $A(1;5;2)$, $B(-5;4;0)$, $C(3;-3;2)$, $D(3;-3;0)$. Обчислити проекцію $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(3;0;-2)$, $B(4;8;3)$, $C(5;4;2)$.

Варіант 15

1. Дано точки $A(2;0;-2)$ і $B(3;-1;1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(1;4;3)$, $B(2;0;3)$, $C(4;2;3)$, $D(4;3;1)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;4;-5\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(3;0;2)$ в точку $B(0;5;0)$.
4. Дано точки $A(1;4;5)$, $B(-1;2;3)$, $C(3;-4;0)$, $D(3;-3;0)$. Обчислити проекцію $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(-3;-1;-3)$, $B(-2;7;2)$, $C(-1;3;1)$.

Варіант 16

1. Дано точки $A(0;0;-2)$ і $B(5;-2;1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.

2. Дано вершини чотирикутника $A(3;2;4)$, $B(2;3;1)$, $C(3;3;4)$, $D(0;3;5)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;2;-4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(1;-1;4)$ в точку $B(0;0;0)$.
4. Дано точки $A(1;2;2)$, $B(3;5;5)$, $C(5;4;1)$, $D(5;0;1)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(5;-1;-8)$, $B(3;7;-3)$, $C(4;3;-4)$.

Варіант 17

1. Дано точки $A(3;-1;1)$ і $B(2;0;-2)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;3;4)$, $B(3;2;2)$, $C(4;4;4)$, $D(1;2;1)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{-5;3;0\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(5;4;1)$ в точку $B(3;1;0)$.
4. Дано точки $A(1;5;5)$, $B(5;3;1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;4;1)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(1;-1;-2)$, $B(2;7;3)$, $C(3;3;2)$.

Варіант 18

1. Дано точки $A(5;-2;1)$ і $B(1;1;1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;3;0)$, $B(4;5;2)$, $C(4;2;0)$, $D(3;5;2)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{-5;1;5\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(4;0;1)$ в точку $B(3;3;1)$.
4. Дано точки $A(1;-5;3)$, $B(0;3;-4)$, $C(-1;4;1)$, $D(-5;0;3)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.

5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(2;-2;-3)$, $B(3;6;2)$, $C(4;2;1)$.

Варіант 19

1. Дано точки $A(2;2;2)$ і $B(-2;1;-3)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;2;2)$, $B(1;4;3)$, $C(5;4;5)$, $D(3;3;3)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\overrightarrow{F}=\{-5;5;4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2;2;3)$ в точку $B(2;4;1)$.
4. Дано точки $A(1;1;1)$, $B(4;3;2)$, $C(3;4;0)$, $D(3;2;0)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(1;-8;-5)$, $B(2;0;0)$, $C(3;-4;-1)$.

Варіант 20

1. Дано точки $A(-1;4;2)$ і $A(-1;4;2)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;3;4)$, $B(2;0;4)$, $C(4;0;1)$, $D(5;1;3)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\overrightarrow{F}=\{5;1;1\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-3;1;3)$ в точку $B(-2;0;5)$.
4. Дано точки $A(1;3;0)$, $B(3;3;2)$, $C(0;2;1)$, $D(3;1;1)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(-1;0;-1)$, $B(0;8;4)$, $C(1;4;3)$.

Варіант 21

1. Дано точки $A(-1;1;-1)$ і $B(3;2;-1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;0;2)$, $B(2;4;2)$, $C(5;4;1)$, $D(4;4;4)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.

3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;2;4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-5;0;3)$ в точку $B(-4;5;3)$.
4. Дано точки $A(1;4;4)$, $B(1;3;1)$, $C(3;5;1)$, $D(3;1;1)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(0;-2;-3)$, $B(1;6;2)$, $C(2;2;1)$.

Варіант 22

1. Дано точки $A(0;-1;-3)$ і $B(4;0;1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;1;3)$, $B(3;2;5)$, $C(3;2;5)$, $D(4;3;5)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;-1;4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-4;1;-3)$ в точку $B(-4;0;4)$.
4. Дано точки $A(1;3;0)$, $B(2;0;5)$, $C(2;1;2)$, $D(5;0;1)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(0;-5;0)$, $B(1;3;5)$, $C(2;-1;4)$.

Варіант 23

1. Дано точки $A(-5;-2;1)$ і $B(0;-4;2)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;3;5)$, $B(2;1;5)$, $C(1;5;0)$, $D(2;1;5)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;-2;0\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-4;1;-5)$ в точку $B(-3;2;1)$.
4. Дано точки $A(1;2;0)$, $B(3;3;2)$, $C(4;3;1)$, $D(4;3;2)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(3;-4;1)$, $B(4;4;6)$, $C(5;0;5)$.

Варіант 24

1. Дано точки $A(-1;-2;3)$ і $B(4;0;-2)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;2;5)$, $B(2;4;3)$, $C(1;4;4)$, $D(0;1;3)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;0;3\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-3;3;-3)$ в точку $B(-4;2;5)$.
4. Дано точки $A(1;0;3)$, $B(3;4;0)$, $C(-3;4;5)$, $D(-3;4;3)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(0;-1;-4)$, $B(1;7;1)$, $C(2;3;0)$.

Варіант 25

1. Дано точки $A(1;5;-4)$ і $B(2;1;-3)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;3;0)$, $B(5;3;5)$, $C(5;1;5)$, $D(4;0;4)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;-1;3\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2;1;-2)$ в точку $B(3;3;-2)$.
4. Дано точки $A(1;3;5)$, $B(3;4;0)$, $C(1;3;2)$, $D(3;0;1)$. Обчислити проекцію $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(2;0;3)$, $B(3;8;2)$, $C(4;4;1)$.

Варіант 26

1. Дано точки $A(2;-1;-1)$ і $B(5;-3;1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;5;5)$, $B(4;3;5)$, $C(2;5;5)$, $D(4;0;4)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.

3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;0;1\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(1;4;-3)$ в точку $B(1;0;0)$.
4. Дано точки $A(1;4;1)$, $B(3;4;1)$, $C(0;5;0)$, $D(0;5;1)$. Обчислити проекцію $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(-1;-3;-6)$, $B(0;5;-1)$, $C(1;1;2)$.

Варіант 27

1. Дано точки $A(0;2;4)$ і $B(-1;-3;-5)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;4;5)$, $B(2;1;4)$, $C(4;4;0)$, $D(1;5;4)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;-3;4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(4;5;-2)$ в точку $B(1;1;-1)$.
4. Дано точки $A(1;5;2)$, $B(0;3;1)$, $C(4;4;2)$, $D(4;3;2)$. Обчислити проекцію $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(3;-7;-2)$, $B(4;1;3)$, $C(5;-3;2)$.

Варіант 28

1. Дано точки $A(-2;3;-1)$ і $B(4;2;-1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;3;4)$, $B(3;5;5)$, $C(2;0;0)$, $D(5;5;4)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;4;-2\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(0;-2;1)$ в точку $B(0;4;2)$.
4. Дано точки $A(1;-4;4)$, $B(0;0;0)$, $C(-1;1;3)$, $D(-1;4;3)$. Обчислити проекцію $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(-4;-2;-5)$, $B(-3;6;0)$, $C(-2;2;-1)$.

Варіант 29

1. Дано точки $A(5;-1;3)$ і $B(2;1;0)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;0;1)$, $B(4;2;3)$, $C(4;0;1)$, $D(2;3;4)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;5;-2\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(4;-1;5)$ в точку $B(0;5;5)$.
4. Дано точки $A(1;-2;4)$, $B(4;2;-1)$, $C(-2;1;3)$, $D(-2;1;2)$. Обчислити проекцію $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(-7;2;-4)$, $B(-6;10;1)$, $C(-5;6;0)$.

Варіант 30

1. Дано точки $A(-1;-4;2)$ і $B(5;0;-1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вершини чотирикутника $A(4;2;1)$, $B(3;1;5)$, $C(4;2;0)$, $D(2;2;5)$. Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.
3. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;4;-4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(1;-5;2)$ в точку $B(0;0;3)$.
4. Дано точки $A(1;-3;3)$, $B(2;4;-1)$, $C(-5;4;3)$, $D(-5;3;3)$. Обчислити проекцію $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.
5. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(-4;-2;-5)$, $B(-3;6;0)$, $C(-2;2;-1)$.

Практичне заняття 3

Векторний добуток векторів, властивості, застосування

Основні теоретичні відомості

3.1. Поняття векторного добутку.

Векторним добутком двох векторів, $\bar{a}$ і $\bar{b}$, називається вектор $\bar{c}$, який задовольняє такі умови:

- вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (рис. 3.1);
- вектор $\bar{c}$ напрямлений у той бік, що якщо дивитися з його кінця, то найкоротший оберт від вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ виконуватиметься проти годинникової стрілки, тобто вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ утворюють праву трійку векторів;

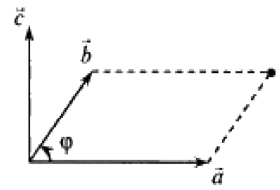


Рис. 3.1

- довжина вектора $\bar{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ як на сторонах.

Векторний добуток позначають: $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}\,\bar{b}]$.

3.2. Основні властивості векторного добутку.

Геометричні властивості.

1. Довжина вектора $\bar{c}$ векторного добутку $\bar{a}$ і $\bar{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ як на сторонах. Площа паралелограма зі сторонами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ і гострим кутом між ними φ обчислюється за формулою $S_1 = ab\sin\varphi$, тому $|\bar{c}|=|\bar{a}||\bar{b}|\cdot$ $\sin(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$.

2. $|\bar{c}|=|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}||\bar{b}|$, якщо $\sin\varphi=1$, тобто $\varphi=(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b})=\dfrac{\pi}{2}$, або $\bar{a}\perp\bar{b}$.

3. $\bar{a}\times\bar{b}=0$, якщо $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$.

4. Вираз $\bar{a}\times\bar{a}=[\bar{a}\,\bar{a}]$ називається векторним квадратом. Векторний квадрат дорівнює нулю.

Алгебраїчні властивості.

1. При зміні порядку множників векторний добуток змінює знак на протилежний: $[\bar{a}\,\bar{b}]= - [\bar{a}\,\bar{b}]$.

2. Асоціативність відносно множення на число: $(\lambda\,\overline{a})\times\overline{b}=$ $=\lambda(\overline{a}\times\overline{b})$.

3. Дистрибутивність відносно додавання векторів: $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=$ $=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$, $\overline{c}\times(\overline{a}+\overline{b})=\overline{c}\times\overline{a}+\overline{c}\times\overline{b}$.

4. Обчислення векторного добутку, якщо вектори задано в координатній формі. На основі властивостей векторного добутку векторів обчислимо $\overline{a}\times\overline{b}$:

$\overline{a}\times\overline{b}=(X_1\bar{i}+Y_1\bar{j}+Z_1\bar{k})\times(X_2\bar{i}+Y_2\bar{j}+Z_2\bar{k})=X_1X_2[\bar{i}\,\bar{i}]+Y_1X_2[\bar{j}\,\bar{i}]+$ $+Z_1X_2[\bar{k}\,\bar{i}]+X_1Y_2[\bar{i}\,\bar{j}]+Y_1Y_2[\bar{j}\,\bar{j}]+Z_1Y_2[\bar{k}\,\bar{j}]+X_1Z_2[\bar{i}\,\bar{k}]+Y_1Z_2[\bar{j}\,\bar{k}]+$ $+Z_1Z_2[\bar{k}\,\bar{k}]$.

Виходячи з рис. 3.2 визначимо векторний добуток ортів:

$[\bar{i}\,\bar{i}]=0$, $[\bar{i}\,\bar{j}]=\bar{k}$, $[\bar{i}\,\bar{k}]=-\bar{j}$, $[\bar{j}\,\bar{i}]=-\bar{k}$, $[\bar{j}\,\bar{j}]=0$, $[\bar{j}\,\bar{k}]=\bar{i}$,

$[\bar{k}\,\bar{i}]=\bar{j}$, $[\bar{k}\,\bar{j}]=-\bar{i}$, $[\bar{k}\,\bar{k}]=0$.

Підставляючи ці значення у вираз $\overline{a}\times\overline{b}$, дістанемо:

$\overline{a}\times\overline{b}=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\bar{i}-(X_1Z_2-Z_1X_2)\bar{j}+(X_1Y_2-$ $-Y_1X_2)\bar{k}$.

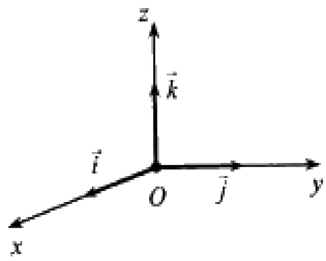


Рис. 3.2

Цей результат можна записати за допомогою визначника третього порядку:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}\bar{k}.$$

3.3. Застосування векторного добутку. Момент сили відносно точки.

Нехай у деякій точці *B* прикладено силу $\overline{F}$. Моментом сили $\overline{F}(X_1;Y_1;Z_1)$, прикладеної в точці *B*, відносно довільної точки *A* (рис. 3.3) називається вектор, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\overline{r_B}=\overline{AB}\{X_1;Y_1;Z_1\}$ на вектор сили $\overline{F}$:

$$\overline{M}_A(\overline{F})=\overline{r_B}\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

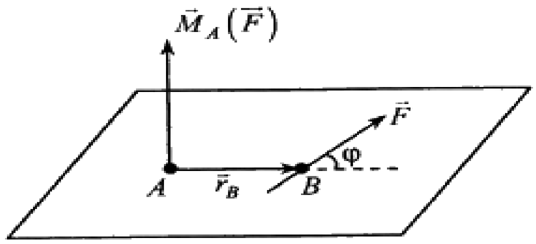


Рис. 3.3

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення векторного добутку двох векторів. Якою символікою користуються для позначення векторного добутку?

2. Чому довжина вектора $\overline{c}$ векторного добутку векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах?

3. Сформулюйте геометричні властивості векторного добутку.

4. Сформулюйте алгебраїчні властивості векторного добутку.

5. Запишіть формулу обчислення векторного добутку, якщо вектори задано в координатній формі.

6. Як може бути використаний векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ для обчислення:

- площі паралелограма, побудованого на даних векторах як на сторонах;
- площі трикутника, дві сторони якого збігаються з даними векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$?

Методичні вказівки до розв'язання задач

Приклад 1. *Знайти модуль векторного добутку* $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, *якщо* $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 6$, *а кут* $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 5\cdot 6\cdot \sin\dfrac{\pi}{4} = 15\sqrt{2}$.

Відповідь: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 15\sqrt{2}$

Приклад 2. Обчислити площу паралелограма три вершини якого знаходяться у точках $A(4;3;2)$, $B(2;3;4)$, $C(1;1;1)$.

Розв'язання. Нехай $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ та $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, тоді $\vec{a}=(-2;0;2)$ та $\vec{b}=(-3;-2;-1)$. Площа паралелограма рівна модулю векторного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & 2\\ -3 & -2 & -1\end{matrix}\right\|=4\sqrt{6}$.

Відповідь: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=4\sqrt{6}$.

Приклад 3. Обчислити синус кута утвореного векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, де $\vec{a}\{4;-4;2\}$, $\vec{b}\{2;3;6\}$.

Розв'язання. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, отже $\sin\varphi=\dfrac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$.

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -4 & 2\\ 2 & 3 & 6\end{matrix}\right\|=10\sqrt{17}.$$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}=6$; $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$.

$$\sin\varphi=\frac{10\sqrt{17}}{6\cdot 7}=\frac{5\sqrt{17}}{21}.$$

Відповідь: $\sin\varphi=\dfrac{5\sqrt{17}}{21}$.

Приклад 4. Дано трикутник з вершинами $A(-1;1;5)$, $B(3;-4;5)$ та $C(-1;5;2)$. Знайти довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

Розв'язання. Щоб розв'язати задачу, достатньо знайти площу трикутника ABC та довжину сторони AC. Площа трикутника ΔABC рівна половині площі паралелограма, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Знайдемо координати цих векторів та координати їх векторного добутку: $\overrightarrow{AB}=\{4;-5;0\}$, $\overrightarrow{AC}=\{0;4;-3\}$,

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 4 & -3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 4\\ -3 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & 4\end{vmatrix}\right)=(15,12,16).$$

Оскільки $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = S$, то знаходимо площу паралелограма: $S = \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{15^2+12^2+16^2} = 25$. Так як $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0+4^2+(-3)^2} = 5$ та $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}S$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|h$, то $h = \frac{2S_{\Delta ABC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$, звідки $h = 5$.

Відповідь: $h = 5$ лін. од.

Приклад 5. У прямокутній декартовій системі координат задані дві точки $A(1;2;-3)$ і $B(0;-4;5)$. Знайти на осі Ox таку точку $C(x;0;0)$, щоб площа трикутника ABC була рівна $1,5$ кв. од.

Розв'язання. Як відомо, площу трикутника можна представити як $\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

Так як $\overrightarrow{AB} = \{-1;-6;8\}$ і $\overrightarrow{AC} = \{x-1;-2;3\}$, то вектор $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ має координати: $X = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -2$, $Y = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = 8x-5$,

$Z = \begin{vmatrix} -1 & x-1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 6x-4$.

Таким чином,

$$\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \sqrt{4+(8x-5)^2+(6x-4)^2} =$$
$$= \sqrt{100x^2-128x+45}.$$

За умовою, $\frac{1}{2}\sqrt{100x^2-128x+45} = \frac{3}{2}$.

Звідси знаходимо, що $x = \frac{1}{25}\left(16 \pm \sqrt{31}\right)$, і, отже, задача має два розв'язки: $\left(\frac{1}{25}\left(16+\sqrt{31}\right);0;0\right)$, $\left(\frac{1}{25}\left(16-\sqrt{31}\right);0;0\right)$.

Відповідь: $C_1\left(\frac{1}{25}\left(16+\sqrt{31}\right);0;0\right)$, $C_2\left(\frac{1}{25}\left(16-\sqrt{31}\right);0;0\right)$.

Приклад 6. Сила $\vec{F}\{-4,2,4\}$ прикладена до точки $A(3;4;-2)$. Знайти величину та направляючі косинуси моменту цієї сили відносно початку координат.

Розв'язання. Якщо $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, то $\left[\vec{a}, \vec{F}\right]$ – момент сили $\vec{F}$ відносно точки O. Застосовуючи формули $x = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, y = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, отримаємо $\left[\vec{a}, \vec{F}\right] = \{20; -4; 22\}$.

Отже, $\left\|\left[\vec{a}, \vec{F}\right]\right\| = \sqrt{20^2 + (-4)^2 + 22^2} = 30$;

$$\cos\alpha = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{-4}{30} = \frac{-2}{15}, \quad \cos\gamma = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}.$$

Відповідь: $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}, \quad \cos\beta = \dfrac{-2}{15}, \quad \cos\gamma = \dfrac{11}{15}.$

$\left\|\left[\vec{a}, \vec{F}\right]\right\| = 30$.

Приклад 7. У трикутнику ABC точка O – центр описаного кола, H – точка перетину його висот. Довести, що $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

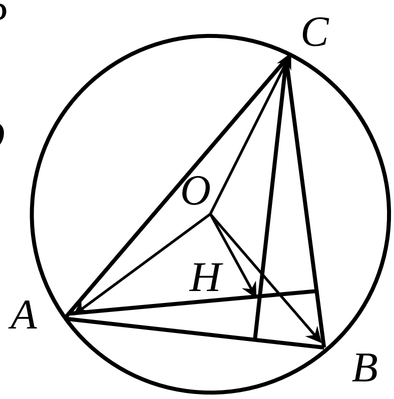


Рис. 3.4

Розв'язання. $AH \perp BC \Rightarrow \left[\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}\right] = 0$ (рис. 3.4).

Проте $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, тому

$$\left(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = 0. \quad (1)$$

Крім того,

$$\overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2 \Rightarrow \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = 0. \quad (2)$$

Віднімаючи (2) від (1), матимемо $\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right) = 0$. Аналогічно з умови $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ і $\overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OA}^2$ маємо $\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right) = 0$. Оскільки $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ і $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} \neq \vec{0}$, то вектор, перпендикулярний до кожного з них, може бути тільки нульовим, тобто $\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Звідси $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Вправи для аудиторної і самостійної роботи

1. Знайти векторний добуток $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ в кожному з наступних випадків:

   1) $\vec{a} = 2\vec{i} + 11\vec{j} - 10\vec{k}; \vec{b} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$;

2) $\vec{a}\{1;2;-2\}$, $\vec{b}\{8;6;4\}$;

3) $\vec{a}\{1;-5;8\}$, $\vec{b}\{3;6;-2\}$.

2. Дано: $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$ і $\vec{a}\vec{b}=12$. Знайти $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

3. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, обчислити:

1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2$;

2) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right]^2$;

3) $\left[\left(3\vec{a}+\vec{b}\right),\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\right]^2$.

4. Яку умову повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарні?

5. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та $\vec{d}$ зв’язані співвідношеннями $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{c},\vec{d}\right]$, $\left[\vec{a},\vec{c}\right]=\left[\vec{b},\vec{d}\right]$. Довести колінеарність векторів $\left(\vec{a}-\vec{d}\right)$ і $\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$.

6. Дано вектори $\vec{a}\{3;-1;-2\}$ та $\vec{b}\{1;2;-1\}$. Знайти координати векторних добутків:

1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$;

2) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{b}\right]$;

3) $\left[\left(2\vec{a}-\vec{b}\right),\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]$.

7. Дано точки $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ та $C(3;2;1)$. Знайти координати векторних добутків:

1) $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]$;

2) $\left[\left(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}\right),\overrightarrow{CB}\right]$.

8. Знайти площу паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=12\sqrt{2}$.

9. Дано вектори $\vec{u}\{1;0;3\}$, $\vec{v}\{4;0;z\}$. При якому значенні z вектор $\left[\vec{u},\vec{v}\right]$ колінеарний осі Oy?

10. Дано вектори $\vec{a}\{0;1;2\}$, $\vec{b}\{-2;-1;0\}$. При якому значенні z вектор $\vec{c}\{3;4;z\}$ ортогональний вектору $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$?

11. При яких значеннях x і y вектор $\vec{c}\{x;y;24\}$ колінеарний вектору $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, де $\vec{a}\{1;-2;3\}$, $\vec{b}\{-4;0;5\}$?

12. Знайти площу трикутника, якщо відомі координати його вершин $A(1;6;4)$, $B(3;1;0)$, $C(4;-1;-6)$.

13. Знайти довжину висоти BD трикутника ABC, якщо відомі його вершини $A(-5;6;-2)$, $B(-1;1;-2)$, $C(-1;-3;1)$

14. Дано точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ та $C(5;2;6)$. Знайти площу трикутника ABC.

15. Дано вершини трикутника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ та $C(1;3;-1)$. Обчислити довжину його висоти, що опущена з вершини B на сторону AC.

16. Площа трикутника ABC рівна $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$ кв. од. Дві його вершини знаходяться в точках $A(2;-1;3)$ і $B(1;2;1)$. Знайдіть координати третьої вершини C, якщо вона лежить на осі Oz.

17. Знайдіть синус кута, утвореного векторами $\vec{a}\{3;4;1\}$ і $\vec{b}\{2;3;1\}$.

18. Знайдіть проекцію вектора $\vec{p}=\left(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\right)\left(\vec{i}+5\vec{j}\right)$ на вісь, що має напрямок вектора $\vec{q}=\{2;-1;2\}$.

19. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи, що він перпендикулярний векторам $\vec{a}\{2;-3;1\}$ та $\vec{b}\{1;-2;3\}$ та задовольняє умову: $\vec{x}(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$.

20. Довести, що векторний добуток підпорядковується таким законам:

$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ - альтернативний закон;

$\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\lambda\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]\lambda$, де λ - скаляр, - асоціативний закон відносно скалярного множника.

21. Довести тотожність $\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2+\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$.

22. Сила $\vec{F}\{4;-3;-7\}$ прикладена до точки $A(1;6;5)$. Знайти момент цієї сили відносно початку координат.

23. Сила $\vec{F}\{2;-2;-3\}$ прикладена до точки $A(4;5;6)$. Знайти величину та направляючі косинуси моменту цієї сили відносно точки $C(2;3;-3)$.

24. Дано вершини трикутника $A(2;-1;-3)$, $B(1;2;-4)$, $C(3;-1;-2)$. Обчислити координати вектора $\vec{h}$, колінеарного його висоті, опущеної з вершини A на протилежну сторону, при умові, що $\vec{h}$ утворює з віссю Oy тупий кут і що його модуль рівний $2\sqrt{34}$.

25. Дано трикутник з вершинами $A(4;3;-1)$, $B(6;2;0)$, $C(2;-1;2)$. Довести, що внутрішні кути при вершинах A та B рівні між собою.

26. Спростити вирази:

1) $\left[\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right),\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)\right]$,

2) $\left[\left(5\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}\right),\left(3\vec{a}+7\vec{b}-6\vec{c}\right)\right]$,

3) $\left[\left(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\right),\left(4\vec{i}+5\vec{j}-6\vec{k}\right)\right]$.

27. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задовільняють умову $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Довести, що $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{c},\vec{a}\right]$.

28. Дано вектори $\vec{a}\{2;-3;1\}$, $\vec{b}\{-3;1;2\}$ і $\vec{c}\{1;2;3\}$. Знайти $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]$ і $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]$.

29. Знайти момент сили , що прикладена до точки $A(2;-4;4)$, відносно початку координат, якщо величина її рівна квадрату відстані від точки A до початку координат, а напрямок співпадає з напрямком перпендикуляра, проведеного з точки A на вісь Ox.

30. Знайдіть в точці $M(-3;4;2)$ напруженість $\vec{H}$ магнітного поля, що створюється струмом $\vec{I}=-3\vec{k}$, що протікає по прямолінійному провіднику.

31. Знайдіть в точці $M(1;1;1)$ напруженість $\vec{H}$ магнітного поля, що створюється струмом $\vec{I}=4\vec{i}$, що протікає по прямолінійному провіднику. Знайдіть кут, що утворюється між векторами $\vec{H}$ та $\vec{a}=2\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k}$.

32. Знайдіть в точці $M(-2;1;0)$ напруженість $\vec{H}$ магнітного поля, що створюється струмом $\vec{I}=\vec{i}+2\vec{j}$, що протікає по прямолінійному провіднику. Знайдіть кут, що утворюється між вектором $\vec{H}$ та віссю Ox.

Відповіді

1. $1)\,38\vec{i}-26\vec{j}-21\vec{k}$; $2)\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left\{20;-20;-10\right\}$; $3)\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left\{-38;26;21\right\}$. **2.** $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=16$.**3.** $1)\,24$; $2)\,60$. **4.** Вектори мають бути колінеарними. **6.** $1)\left\{5;7;1\right\}$; $2)\left\{10;2;14\right\}$; $3)\left\{20;4;28\right\}$. **7.** $1)\left\{6;-4;-6\right\}$, $2)\left\{-12;8;12\right\}$. **8.** $12\sqrt{2}$. **9.** При будь-якому z. **10.** $z=5$. **11.** $x=30$, $y=51$. **12.** $\frac{3}{2}\sqrt{61}$**. 13.** $\left|BD\right|=\frac{25}{\sqrt{106}}$. **14.** 14 кв. од. **15.** 5 од. **16.** $C(0;0;2)$. **17.** $\sin\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=0,8654$. **18.** $Пр_{\vec{q}}\vec{p}=\frac{25}{3}$. **19.** $\vec{x}\{7;5;1\}$. **22.** $\left[\vec{a},\vec{F}\right]=\left\{-27;27;-27\right\}$, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$. **23.** $\left|\left[\vec{a},\vec{F}\right]\right|=28$, $\cos\alpha=\frac{3}{7},\cos\beta=\frac{6}{7},\cos\gamma=-\frac{2}{7}$. **24.** $\vec{h}\left\{-6;-8;-6\right\}$. **26.** $1)\,23\left[\vec{a},\vec{b}\right]$; $2)\,47\left[\vec{a},\vec{b}\right]+4\left[\vec{b},\vec{c}\right]-38\left[\vec{a},\vec{c}\right]$; $3)\,-2\vec{i}+28\vec{j}+22\vec{k}$. **28.** $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]=\left\{-7;14;-7\right\}$, $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\left\{10;13;19\right\}$. **29.** $36\sqrt{2}\left(-\vec{i}-\vec{k}\right)$. **30.** $\frac{3k}{25}\left(4\vec{i}+3\vec{j}\right)$. **31.** $\vec{H}=2k\left(-\vec{j}+\vec{k}\right)$, $\cos\left(\vec{H}\,\hat{}\,\vec{a}\right)=\frac{2\sqrt{39}}{13}$. **32.** $\vec{H}=H\vec{k}$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}$.

Практичне заняття 4
Мішаний добуток векторів, його властивості та застосування

Основні теоретичні відомості

4.1. Поняття мішаного добутку

З'ясуємо, що можна сказати про добуток трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, з урахуванням того, що нам відомо скалярний і векторний добутки двох векторів.

Можливі випадки:

1) якщо вектор $\overline{a}$ помножити на вектор $\overline{b}$ скалярно, а результат потім помножити на вектор $\overline{c}$, то дістанемо вектор, колінеарний вектору *c;*

2) якщо вектор $\overline{a}$ помножити на вектор $\overline{b}$ векторно, а одержаний вектор помножити на вектор $\overline{c}$ скалярно, то дістанемо скаляр;

3) якщо вектор $\overline{a}$ помножити на вектор $\overline{b}$ векторно, а одержаний вектор помножити на вектор $\overline{c}$ векторно, то дістанемо вектор.

У випадку 2) одержимо векторно-скалярний, або мішаний, добуток, а у випадку 3) – подвійний векторний добуток. Предметом нашого вивчення буде мішаний добуток.

Мішаним добутком трьох векторів $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ називають скалярну величину, яка дістається в результаті скалярного множення векторного добутку двох перших векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, на третій вектор $\overline{c}$: $[\overline{a}\,\overline{b}]\overline{c}$.

Мішаний добуток позначається: $(\overline{a}\,\overline{b})\overline{c} = [\overline{a}\,\overline{b}]\overline{c} = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

Нижче покажемо, що результат не залежить від того, які вектори, що стоять поряд, перемножуються векторно: $[\overline{a}\,\overline{b}]\overline{c} = \overline{a}[\overline{b}\,\overline{c}] = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

4.2. Геометричний зміст мішаного добутку

Нехай зведені до спільного початку некомпланарні вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ утворюють праву трійку (рис. 4.1).

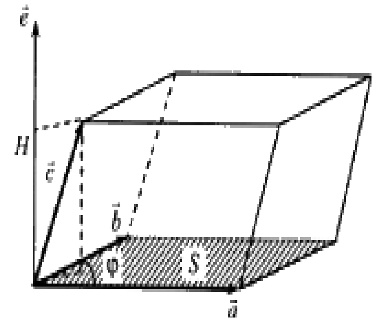


Рис. 4.1

Нехай $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{e}$, тоді, за визначенням векторного добутку, $|\bar{e}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi=S_{пар}$, тобто площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ як на сторонах. Скалярний добуток вектора $\bar{e}$ на вектор $\bar{c}$ можна записати так: $\bar{e}\,\bar{c}=|\bar{e}|\,пр_{\bar{e}}\bar{c}$. Проекція вектора $\bar{c}$ на напрям вектора $\bar{e}$ буде висотою паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ як на ребрах: $пр_{\bar{e}}\bar{c}=H$. Отже, $|\bar{e}|\,пр_{\bar{e}}\bar{c}=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi\cdot H=S_{пар}\cdot H=V_{пар}$.

Таким чином, мішаний добуток трьох векторів, якщо вони утворюють праву трійку векторів, дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на ребрах. Узагальнюючи зроблений висновок, можна сформулювати таку теорему:

Теорема 1. *Модуль мішаного добутку $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ як на ребрах. Знак мішаного добутку додатний, якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку, і від'ємний у противному разі.*

Із теореми випливає, що, в якому б порядку ми не брали множники, абсолютна величина мішаного добутку $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ залишається тією самою.

Об’єм піраміди можна обчислити за формулою:

$$V_{пір}=\frac{1}{6}S_{осн}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{пар}\cdot H=\frac{1}{6}V_{пар}.$$

4.3. Мішаний добуток у координатній формі

Нехай вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ задано в координатній формі: $\bar{a}\{X_1;Y_1;Z_1\}$, $\bar{b}\{X_2;Y_2;Z_2\}$, $\bar{c}\{X_3;Y_3;Z_3\}$. За відомою формулою обчислимо:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{e},\text{ де } \bar{e}=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\bar{k}.$$

Далі обчислимо:

$$\bar{e}\,\bar{c} = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - Y_3 \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Ліва частина цієї рівності є розкладанням визначника $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$ за елементами третього рядка.

Отже маємо, $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$.

4.4. Умова компланарності трьох векторів

Мішаний добуток векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ дорівнює нулю, якщо:

1) серед векторів-співмножників є хоча б один нуль-вектор;
2) серед векторів-співмножників два вектори — колінеарні;
3) всі три вектори — компланарні.

Випадки 1) і 2) можна звести до випадку 3):

a) якщо один із векторів є нуль-вектором, то він може належати будь-якій площині і, зокрема, тій, де лежать два ненульові вектори;

b) якщо два вектори колінеарні, то паралельним перенесенням їх можна розмістити на одній прямій, а якщо так, то через цю пряму і третій вектор можна провести площину. Отже, ці вектори – компланарні.

Зауваження. Коли одержана пряма і напрям вектора є мимобіжними, то за допомогою паралельного перенесення можна домогтися їх перетину.

Теорема 2. *Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ є рівність нулю їх мішаного добутку.*

Теорема 3. *Кругове переставлення множників мішаного добутку не змінює його величини. Переставлення двох сусідніх множників змінює знак добутку на протилежний:*

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a} = \bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b} = -\bar{b}\,\bar{a}\,\bar{c} = -\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} = -\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b}.$$

Питання для самоперевірки

1. У якому випадку добуток трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$

називається мішаним? Як позначається мішаний добуток?

2. Який геометричний зміст мішаного добутку?

3. За якою формулою обчислюється мішаний добуток векторів, коли вони задані в координатній формі?

4. У якому випадку мішаний добуток є додатним числом, а в якому – від'ємним?

5. Як виражається необхідна і достатня умови компланарності трьох векторів через їх мішаний добуток?

6. Що таке кругове переставлення векторів і як воно впливає на величину мішаного добутку?

7. За якою формулою обчислюється об'єм трикутної піраміди, три ребра якої збігаються з трьома векторами зі спільним початком?

Методичні рекомендації

Приклад 1. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

Розв'язання. $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 24 - 1 + 4 + 3 + 2 = 33$.

Відповідь: $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = 33$**.**

Приклад 2. Дано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Знайти мішаний добуток $\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}+\vec{a}\right)\right)$.

Розв'язання. Скориставшись властивостями мішаного добутку, отримаємо:

$$\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}+\vec{a}\right)\right) = \left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\vec{c}\right) + \left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\vec{a}\right) =$$

$$= \left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{b}\vec{c}\right) + \left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}\vec{c}\right) + \left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{b}\vec{a}\right) + \left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}\vec{a}\right) =$$

$$= \left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) + \left(\vec{b}\vec{b}\vec{c}\right) + \left(\vec{a}\vec{c}\vec{c}\right) + \left(\vec{b}\vec{c}\vec{c}\right) + \left(\vec{a}\vec{b}\vec{a}\right) + \left(\vec{b}\vec{b}\vec{a}\right) + \left(\vec{a}\vec{c}\vec{a}\right) + \left(\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right).$$

Так як мішаний добуток векторів, серед яких є рівні дорівнює нулю, то в отриманій сумі відмінними від нуля є члени $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \left(\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right)$, що повторюється двічі. Отже, $\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}+\vec{a}\right)\right) = 2\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

Відповідь: $\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}+\vec{a}\right)\right) = 2\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

Приклад 3. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a}\{2;4;3\}$, $\vec{b}\{1;3;4\}$, $\vec{c}\{2;4;1\}$.

Розв'язання. $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=6+12+32-18-4-32=-4\neq 0$.

Відповідь: Вектори некомпланарні.

Приклад 4. Довести, що точки $A(-1;2;1)$, $B(-3;1;2)$, $C(3;-2;2)$, $D(3;-4;3)$ належать одній площині.

Розв'язання. Розглянемо три вектори, початок кожного з яких знаходиться у точці A, а кінець - відповідно в точках B, C, D: $\overrightarrow{AB}=\{-2;-1;1\}$; $\overrightarrow{AC}=\{4;-4;1\}$; $\overrightarrow{AD}=\{4;-6;2\}$. Знайдемо їх мішаний добуток: $\left(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix}=0$.

Виконується умова компланарності векторів $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$. Отже, точки A, B, C, D належать одній площині.

Приклад 5. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами у точках $A(5;5;6)$, $B(4;5;4)$, $C(4;3;3)$, $D(2;2;2)$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}\{-1;0;-2\}$, $\overrightarrow{AC}\{-1;-2;-3\}$, $\overrightarrow{AD}\{-3;-3;-4\}$. Так як $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right)\right|$, то

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -4 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-8-6+12+9\right|=\frac{7}{6} \text{ (куб.од.).}$$

Відповідь: $V=\frac{7}{6}$ куб.од.

Приклад 6. Об'єм піраміди $V=5$, три її вершини лежать у точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона лежить на осі Oy.

Розв'язання. Координати точки O мають вигляд $(0;y;0)$.

1.Обчислимо координати векторів $\overrightarrow{AB}\{1;-1;2\}$, $\overrightarrow{AC}\{0;-2;4\}$, $\overrightarrow{AD}\{-2;y-1;1\}$.

Обчислюємо об'єм піраміди $ABCD$:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 4\\ -2 & y-1 & 1\end{matrix}\right\|; \qquad \frac{1}{6}\left|-2+8-8-4(y-1)\right|=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|-4y+2\right|=30\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-4y+2>0,\\ -4y+2=30,\end{cases}\\ \begin{cases}-4y+2<0,\\ 4y-2=30.\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<-\dfrac{1}{2},\\ y=-7,\end{cases}\\ \begin{cases}y>\dfrac{1}{2},\\ y=8.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $D_1(0;-7;0)$, $D_2(0;8;0)$.

Приклад 7. Дано тетраедр $OABC$, A', B', C', O' – центри тяжіння його граней OBC, OAC, OAB і ABC (рис.1). Знайти, яку частину об’єму тетраедра $OABC$ складає об’єм тетраедра $O'A'B'C'$.

Розв’язання. Позначимо $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Тоді об’єм V тетраедра $OABC$ виражається формулою: $V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|$. Аналогічно об’єм v тетраедра $O'A'B'C'$ рівний: $v=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{O'A'}\,\overrightarrow{O'B'}\,\overrightarrow{O'C'}\right)\right|$.

Так як $\overrightarrow{O'A'}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OO'}$ і $\overrightarrow{OA'}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{OO'}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$, то $\overrightarrow{O'A'}=-\dfrac{\vec{a}}{3}$.

Так само знайдемо, що $\overrightarrow{O'B'}=-\dfrac{\vec{b}}{3}$, $\overrightarrow{O'C'}=-\dfrac{\vec{c}}{3}$.

Таким чином, $v=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{27}\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|=\dfrac{1}{27}V$.

Відповідь: $v=\dfrac{1}{27}V$.

Завдання для самостійної та аудиторної роботи

1. Визначити, якою є трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (правою чи лівою), якщо

1) $\vec{a}=\vec{k},\vec{b}=\vec{i},\vec{c}=\vec{j}$

2) $\vec{a}=\vec{i},\vec{b}=\vec{k},\vec{c}=\vec{j}$

4) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\vec{b}=\vec{j},\vec{c}=\vec{k}$

5) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\vec{b}=\vec{i}-\vec{j},\vec{c}=\vec{j}$

3) $\vec{a}=\vec{i},\vec{b}=\vec{j},\vec{c}=\vec{k}$ 6) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\vec{b}=\vec{i}-\vec{j},\vec{c}=\vec{k}$

2. Обчислити мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$:

1) $\vec{a}\{-4;-3;-9\},\vec{b}\{1;0;-1\},\vec{c}\{1;-2;2\}$;

2) $\vec{a}\{1;2;1\},\vec{b}\{1;2;-2\},\vec{c}\{8;6;4\}$;

3) $\vec{a}\{1;2;3\},\vec{b}\{3;1;2\},\vec{c}\{2;3;1\}$;

4) $\vec{a}\{9;7;8\},\vec{b}\{6;4;5\},\vec{c}\{1;2;3\}$.

3. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{u}\{1;3;-1\}$, $\vec{v}\{-2;0;3\}$, $\vec{w}\{4;1;0\}$ і визначити, правою чи лівою є трійка векторів $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Якою трійкою є трійка векторів $\vec{v}$, $\vec{w}$, $-\vec{u}$.

4. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку і взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $\left|\vec{a}\right|=4, \left|\vec{b}\right|=2, \left|\vec{c}\right|=3,$ обчислити $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

5. Дано три вектора: $\vec{a}\{1;-1;3\}$, $\vec{b}\{-2;2;1\}$ та $\vec{c}\{3;-2;5\}$. Обчислити $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

6. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівний 30^0. Відомо, що $\left|\vec{a}\right|=6$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\left|\vec{c}\right|=3$. Знайдіть $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Дано вектори $\vec{a}\{3;4;-1\}$, $\vec{b}\{2;3;5\}$ і $\vec{c}\{1;0;1\}$. Знайдіть: а) $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$; б) $\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{b}\vec{c}\right)$; в) $\left(\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\vec{a}\vec{c}\right)$.

8. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a}\{2;3;-1\},\vec{b}\{1;-1;3\},\vec{c}\{1;9;-1\}$;

2) $\vec{a}\{3;-2;1\},\vec{b}\{2;1;2\},\vec{c}\{3;-1;-2\}$;

3) $\vec{a}\{2;-1;2\},\vec{b}\{1;2;-3\},\vec{c}\{3;-4;7\}$.

9. Встановити, чи компланарні вектори, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, якщо:

1) $\vec{u}\{4;-3;2\}$, $\vec{v}\{-2;6;8\}$, $\vec{w}\{2;3;10\}$;

2) $\vec{u}\{1;-2;5\}$, $\vec{v}\{-4;3;0\}$, $\vec{w}\{3;-5;8\}$;

3) $\vec{u}=\vec{i}$, $\vec{v}=\vec{k}$, $\vec{w}=\overrightarrow{MN}$, де $\overrightarrow{OM}\{6;3;4\}$, $\overrightarrow{ON}\{-2;3;1\}$.

10. Довести, що чотири точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежать у одній площині.

11.Обчислити об`єм тетраедра, вершини якого знаходяться у точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ та $D(4;1;3)$.

12.Знайти об`єм трикутної піраміди $ABCD$:

1) $A(6;1;4)$, $B(2;-2;5)$, $C(7;1;3)$ та $D(1;-3;7)$;

2) $A(1;2;6)$, $B(0;3;8)$, $C(-5;-1;4)$ та $D(-3;2;-6)$.

13.Дано вершини тетраедра: $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$ та $D(-5;-4;8)$. Знайти довжину його висоти, що опущена з вершини D.

14.З`ясувати, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

1)$\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k}, \vec{c}=7\vec{i}+8\vec{j}+9\vec{k}$;

2)$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}, \vec{c}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$;

3)$\vec{a}=\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=8\vec{i}+\vec{j}+8\vec{k}, \vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

15.Знайти об`єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

1)$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}, \vec{c}=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$;

2)$\vec{a}=4\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=-2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}, \vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$;

3)$\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}, \vec{c}=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$;

4)$\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}-4\vec{q}, \vec{c}=3\vec{p}+5\vec{q}$,

$де \left|\vec{p}\right|=\dfrac{1}{2}; \left|\vec{q}\right|=4; \varphi=\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=45^0.$

16.Дано паралелепіпед $ABCDA'B'C'D'$. Знайти, яку частину об'єму даного паралелепіпеда складає об'єм тетраедра $AB'D'C$.

17. Об'єм трикутної піраміди дорівнює 9 куб. од. Три його вершини знаходяться у точках $A(4;-1;2)$, $B(5;1;4)$, $C(3;2;-1)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона належить осі Oz.

18.Знайти момент сили $\vec{F}\{3;4;-7\}$, що прикладена до точки $A(2;-1;5)$, відносно осі: а) Ox; б) Oy; в) Oz.

19.В прямокутному паралелепіпеді $ABCDA'B'C'D'$ $\left|\overrightarrow{BC}\right|=3$см, $\left|\overrightarrow{BA}\right|=12$см, $\left|\overrightarrow{AA'}\right|=4$см. По діагоналі $\left|\overrightarrow{DC'}\right|$ напрямлена сила $\vec{P}$, рівна по модулю $30H$. Знайти момент цієї сили відносно точки B та відносно осі (BD').

20.Знайти момент рівнодійної сил $\overrightarrow{M}\{1;4;5\}$, $\overrightarrow{N}\{1;-1;2\}$ і $\overrightarrow{P}\{2;3;-1\}$, прикладених у точці $A(5;1;3)$ відносно бісектриси координатного кута площини Oyz, що розташовані у першій та третій чвертях.

Відповіді:

1. 1) права, 2) ліва, 3) ліва, 4) права, 5) вектори компланарні, 6) ліва. **2.** 1) 46; 2) -30; 3) 18; 4) -9. **3.** $\left(\vec{u}\vec{v}\vec{w}\right)=35$; трійка векторів $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ – права; трійка векторів $\vec{v}$, $\vec{w}$, $-\vec{u}$ – ліва. **4.** $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=24$. **5.** $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=-7$. **6.** $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\pm 27$, плюс, коли тріка векторів права, мінус – ліва. **7.** а) 24; б) 24; в) 72. **8.** 1)компланарні; 2) некомпланарні; 3) компланарні. **9**. 1) ні; 2) ні; 3) так. **11**. 3 куб. од. **12.** 1) $\frac{23}{3}$; 2) $\frac{62}{3}$. **13.** 11 лін. од. **14.** 1) так; 2) ні; 3) так. **15.** 1) 13; 2) 76; 3) 12; 4) 0. **16.** $\frac{1}{3}$. **17.** $D(0;0;3)$. **18.** а) $m_x\left(\overrightarrow{F}\right)=-13$; б) $m_y\left(\overrightarrow{F}\right)=29$; в) $m_z\left(\overrightarrow{F}\right)=11$. **19.** $\overrightarrow{M}=9\sqrt{10}\vec{i}-36\sqrt{10}\,\vec{j}+27\sqrt{10}\vec{k}$, $m_{(BD')}\left(\overrightarrow{P}\right)=\frac{108\sqrt{10}}{13}$. Вказівка: Прийміть вершину B за початок координат. **20.** $m_l\left(\overrightarrow{P}\right)=4\sqrt{2}$.

Індивідуальні завдання 3

Векторний та мішаний добуток векторів

Варіант 1.

1. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 6$, $\left|\vec{b}\right| = 5$, обчислити $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{2;-2;1\}$ та $\vec{b} = \{2;3;6\}$.

3. Дано точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ та $C(5;2;6)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P} = \{1;4;2\}$ прикладено до точки $M_0(0;3;4)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;4;3)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(2;0;3)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a} = \{3;4;-1\}$, $\vec{b} = \{2;3;5\}$ та $\vec{c} = \{1;0;1\}$. Обчислити $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a} = \{3;2;-1\}$, $\vec{b} = \{4;5;1\}$ та $\vec{c} = \{\alpha;0;1\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(3;5;6)$, $B(-3;5;-3)$, $C(6;1;4)$, $S(2;3;1)$.

Варіант 2.

1. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, обчислити $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{2;3;2\}$ та $\vec{b} = \{4;2;1\}$.

3. Дано точки $A(2;3;3)$, $B(3;2;3)$ та $C(5;2;6)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{0;5;5\}$ прикладено до точки $M_0(3;3;1)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;2;3)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(2;0;3)$, $C(4;2;1)$ та $D(4;3;6)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{2;3;5\}$ та $\vec{c}=\{1;0;1\}$. Обчислити $\left((\vec{a}+\vec{b})\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{3;3;4\}$, $\vec{b}=\{3;3;5\}$ та $\vec{c}=\{\alpha;0;4\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(5;3;10)$, $B(-1;3;1)$, $C(8;-1;8)$, $S(4;1;5)$.

Варіант 3.

1. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Відомо, що $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$, обчислити $\left|\left[(\vec{a}+\vec{b}),(\vec{a}-\vec{b})\right]\right|$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{3;2;1\}$ та $\vec{b}=\{4;-2;1\}$.

3. Дано точки $A(3;4;-1)$, $B(-2;-4;-1)$ та $C(5;2;6)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{4;0;2\}$ прикладено до точки $M_0(5;2;3)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;0;2)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(3;4;1)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{2;3;5\}$ та $\vec{c}=\{1;0;1\}$. Обчислити $\left((2\vec{a}+3\vec{b})\vec{a}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{3;4;5\}$, $\vec{b}=\{3;4;5\}$ та $\vec{c}=\{\alpha;4;3\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(4;9;11)$, $B(3;7;11)$, $C(7;13;9)$, $S(3;5;6)$.

Варіант 4.

1. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, обчислити $\left|\left[(3\vec{a}+\vec{b}),(\vec{a}-2\vec{b})\right]\right|$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{2;3;1\}$ та $\vec{b} = \{3;4;5\}$.

3. Дано точки $A(2;3;1)$, $B(3;0;-3)$ та $C(3;0;5)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P} = \{2;2;1\}$ прикладено до точки $M_0(4;0;5)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;3;4)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(4;-3;2)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a} = \{3;4;-1\}$, $\vec{b} = \{2;3;5\}$ та $\vec{c} = \{1;0;1\}$. Обчислити $\left((2\vec{a}+3\vec{c})\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a} = \{3;1;0\}$, $\vec{b} = \{1;4;0\}$ та $\vec{c} = \{\alpha;3;0\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(7;4;6)$, $B(1;4;-3)$, $C(10;0;4)$, $S(6;2;1)$.

Варіант 5.

1. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$. Відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, обчислити $\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{3;-1;2\}$ та $\vec{b} = \{3;1;4\}$.

3. Дано точки $A(4;2;1)$, $B(3;0;-3)$ та $C(5;0;3)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P} = \{5;4;1\}$ прикладено до точки $M_0(5;5;0)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;1;0)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(0;5;1)$, $B(2;0;3)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{2;3;5\}$ та $\vec{c}=\{1;0;1\}$. Обчислити $\left((2\vec{c}+3\vec{b})\vec{a}\vec{b}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{3;0;0\}$, $\vec{b}=\{3;0;0\}$ та $\vec{c}=\{\alpha;3;4\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(4;8;7)$, $B(3;6;7)$, $C(7;12;5)$, $S(3;4;2)$.

Варіант 6.

1. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. Відомо, що $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, обчислити $\left[(2\vec{a}+\vec{b}),(\vec{a}+2\vec{b})\right]^2$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{1;-1;2\}$ та $\vec{b}=\{3;-2;1\}$.

3. Дано точки $A(-1;-2;-3)$, $B(3;0;-3)$ та $C(5;8;9)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{4;5;1\}$ прикладено до точки $M_0(0;1;3)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;2;3)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(-1;-2;-3)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{5;3;1\}$, $\vec{b}=\{-4;5;7\}$ та $\vec{c}=\{3;-2;1\}$. Обчислити $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{3;2;2\}$, $\vec{b}=\{5;1;1\}$ та $\vec{c}=\{\alpha;4;4\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(6;10;9)$, $B(5;8;9)$, $C(9;14;7)$, $S(5;6;4)$.

Варіант 7.

1. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Відомо, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, обчислити $\left[(\vec{a} + 3\vec{b}), (3\vec{a} - \vec{b})\right]^2$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{-1; -2; 3\}$ та $\vec{b} = \{3; -2; 1\}$.

3. Дано точки $A(1; 2; 0)$, $B(0; 6; 0)$ та $C(5; 2; 6)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P} = \{3; 5; 0\}$ прикладено до точки $M_0(1; 2; 1)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4; 2; 0)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 0; 3)$, $C(0; 6; 0)$ та $D(3; 0; 5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a} = \{5; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{-4; 5; 7\}$ та $\vec{c} = \{3; -2; 1\}$. Обчислити $\left((2\vec{a} + 3\vec{b})\vec{a}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a} = \{3; 3; \alpha\}$, $\vec{b} = \{2; 2; 4\}$ та $\vec{c} = \{3; 3; 2\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(4; 9; 11)$, $B(3; 7; 11)$, $C(7; 13; 9)$, $S(3; 5; 6)$.

Варіант 8.

1. Дано вектори $\vec{a} = \{3; -1; 2\}$ та $\vec{b} = \{1; 2; -1\}$. Знайти координати векторного добутку: $\left[(2\vec{a} + \vec{b}), \vec{b}\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{2; 5; 1\}$ та $\vec{b} = \{3; 2; 6\}$.

3. Дано точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$ та $C(4; 2; 1)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P} = \{3; 4; 0\}$ прикладено до точки $M_0(4; 2; 2)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4; 5; 3)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 0; 3)$, $C(4; 2; 1)$ та $D(-2; -3; 1)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{5;3;1\}$, $\vec{b}=\{-4;5;7\}$ та $\vec{c}=\{3;-2;1\}$. Обчислити $\left((2\vec{c}+3\vec{b})\vec{a}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{3;0;\alpha\}$, $\vec{b}=\{3;1;4\}$ та $\vec{c}=\{3;5;0\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(4;9;5)$, $B(2;-3;8)$, $C(5;17;6)$, $S(1;7;3)$.

Варіант 9.

1. Дано вектори $\vec{a}=\{3;-1;2\}$ та $\vec{b}=\{1;2;-1\}$. Знайти координати векторного добутку: $\left[(2\vec{a}-\vec{b}),(2\vec{a}+\vec{b})\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{-2;-3;4\}$ та $\vec{b}=\{-1;4;6\}$.

3. Дано точки $A(1;2;0)$, $B(2;0;3)$ та $C(5;2;6)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{0;1;5\}$ прикладено до точки $M_0(0;1;2)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;4;5)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(2;0;3)$, $C(2;-2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{5;3;1\}$, $\vec{b}=\{-4;5;7\}$ та $\vec{c}=\{3;-2;1\}$. Обчислити $\left((2\vec{a}+3\vec{c})\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{3;1;\alpha\}$, $\vec{b}=\{0;0;0\}$ та $\vec{c}=\{1;2;0\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(10;11;10)$, $B(8;-1;13)$, $C(11;19;11)$, $S(7;9;8)$.

Варіант 10.

1. Дано вектори $\vec{a}=\{3;4;-1\}$ та $\vec{b}=\{-1;-2;3\}$. Знайти координати векторного добутку: $\left[(2\vec{a}+\vec{b}),\vec{b}\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{3;2;4\}$ та $\vec{b}=\{-1;-3;2\}$.

3. Дано точки $A(-1;2;3)$, $B(2;5;0)$ та $C(5;2;6)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{5;1;5\}$ прикладено до точки $M_0(1;3;5)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;4;1)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(4;2;-3)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{5;3;1\}$, $\vec{b}=\{-4;5;7\}$ та $\vec{c}=\{3;-2;1\}$. Обчислити $\left((2\vec{a}+3\vec{b})\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{3;5;\alpha\}$, $\vec{b}=\{3;0;0\}$ та $\vec{c}=\{0;5;5\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(11;12;4)$, $B(9;0;7)$, $C(12;20;5)$, $S(8;10;2)$.

Варіант 11.

1. Дано вектори $\vec{a}=\{3;4;-1\}$ та $\vec{b}=\{-1;-2;3\}$. Знайти координати векторного добутку: $\left[(2\vec{a}-\vec{b}),(2\vec{a}+\vec{b})\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{3;-2;5\}$ та $\vec{b}=\{3;2;-1\}$.

3. Дано точки $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ та $C(3;2;1)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{4;2;5\}$ прикладено до точки $M_0(2;4;3)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;4;4)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(-2;4;1)$, $B(2;0;3)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{5;2;1\}$, $\vec{b}=\{0;-4;2\}$ та $\vec{c}=\{3;1;3\}$. Обчислити $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{3;4;\alpha\}$, $\vec{b}=\{2;2;1\}$ та $\vec{c}=\{0;0;0\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(6;6;12)$, $B(0;6;3)$, $C(9;2;10)$, $S(5;4;7)$.

Варіант 12.

1. Дано точки $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ та $C(3;2;1)$. Знайти координати векторного добутку $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{3;-1;2\}$ та $\vec{b} = \{3;4;1\}$.

3. Дано точки $A(3;4;0)$, $B(0;5;2)$ та $C(5;7;6)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P} = \{0;5;1\}$ прикладено до точки $M_0(0;3;0)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;1;5)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(2;0;3)$, $C(5;1;-1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a} = \{5;2;1\}$, $\vec{b} = \{0;-4;2\}$ та $\vec{c} = \{3;1;3\}$. Обчислити $\left((2\vec{a} + 3\vec{b})\vec{a}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a} = \{3;0;2\}$, $\vec{b} = \{3;0;\alpha\}$ та $\vec{c} = \{2;0;1\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(3;8;8)$, $B(-3;8;-1)$, $C(6;4;6)$, $S(2;6;3)$.

Варіант 13.

1. Дано точки $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ та $C(3;2;1)$. Знайти координати векторного добутку $\left[(\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AC}), \overrightarrow{CB}\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{2;4;1\}$ та $\vec{b} = \{4;8;2\}$.

3. Дано точки $A(4;1;-1)$, $B(3;2;-1)$ та $C(5;2;6)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P} = \{5;5;3\}$ прикладено до точки $M_0(1;2;1)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;4;2)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(2;0;3)$, $C(4;2;1)$ та $D(-3;4;1)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{5;2;1\}$, $\vec{b}=\{0;-4;2\}$ та $\vec{c}=\{3;1;3\}$. Обчислити $\left((\vec{a}+\vec{b})\vec{a}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{4;4;1\}$, $\vec{b}=\{1;1;\alpha\}$ та $\vec{c}=\{1;1;1\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(7;3;7)$, $B(1;3;-2)$, $C(10;-1;5)$, $S(6;1;2)$.

Варіант 14.

1. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. Відомо, що $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=4$, обчислити $\left|\left[(\vec{a}+\vec{b}),(\vec{a}-\vec{b})\right]\right|$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{3;8;-1\}$ та $\vec{b}=\{4;2;-3\}$.

3. Дано точки $A(1;2;-2)$, $B(3;1;-3)$ та $C(5;0;6)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{4;0;3\}$ прикладено до точки $M_0(2;3;5)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;4;5)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(1;5;-3)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{5;2;1\}$, $\vec{b}=\{0;-4;2\}$ та $\vec{c}=\{3;1;3\}$. Обчислити $\left((2\vec{c}+3\vec{b})\vec{a}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{4;5;1\}$, $\vec{b}=\{2;1;\alpha\}$ та $\vec{c}=\{2;2;2\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(0;6;3)$, $B(-1;4;3)$, $C(3;10;1)$, $S(-1;2;-2)$.

Варіант 15.

1. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, обчислити $\left|\left[(\vec{a} - 2\vec{b}), (\vec{a} - \vec{b})\right]\right|$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{3; -3; 3\}$ та $\vec{b} = \{2; -2; 1\}$.

3. Дано точки $A(4;3;5)$, $B(4;2;5)$ та $C(5;2;0)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P} = \{2;1;3\}$ прикладено до точки $M_0(0;1;1)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;1;1)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(3;5;-1)$, $B(2;0;3)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a} = \{5;2;1\}$, $\vec{b} = \{0;-4;2\}$ та $\vec{c} = \{3;1;3\}$. Обчислити $\left((2\vec{a} + 3\vec{c})\vec{a}\vec{b}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a} = \{4;4;3\}$, $\vec{b} = \{2;4;\alpha\}$ та $\vec{c} = \{1;4;3\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(3;1;-1)$, $B(2;-1;-1)$, $C(6;5;-3)$, $S(2;-3;-6)$.

Варіант 16.

1. Дано вектори $\vec{a} = \{2;-1;4\}$ та $\vec{b} = \{2;2;-1\}$. Знайти координати векторного добутку: $\left[(2\vec{a} - \vec{b}), (2\vec{a} + \vec{b})\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{5;4;3\}$ та $\vec{b} = \{3;-2;1\}$.

3. Дано точки $A(5;-1;0)$, $B(5;3;1)$ та $C(5;2;6)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P} = \{4;4;5\}$ прикладено до точки $M_0(3;5;1)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;3;5)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(2;0;3)$, $C(4;2;1)$ та $D(4;6;1)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{2;3;3\}$, $\vec{b}=\{1;-2;3\}$ та $\vec{c}=\{4;2;-1\}$. Обчислити $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{4;3;0\}$, $\vec{b}=\{4;1;\alpha\}$ та $\vec{c}=\{1;4;0\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(5;4;6)$, $B(4;2;6)$, $C(8;8;4)$, $S(4;0;1)$.

Варіант 17.

1. Дано вектори $\vec{a}=\{2;-1;4\}$ та $\vec{b}=\{2;2;-1\}$. Знайти координати векторного добутку: $\left[(2\vec{a}-\vec{b}),(\vec{a}+3\vec{b})\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{2;2;1\}$ та $\vec{b}=\{5;-3;2\}$.

3. Дано точки $A(1;2;1)$, $B(3;0;-3)$ та $C(4;3;-2)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{3;5;2\}$ прикладено до точки $M_0(0;4;3)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;2;5)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(1;2;5)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{2;3;3\}$, $\vec{b}=\{1;-2;3\}$ та $\vec{c}=\{4;2;-1\}$. Обчислити $\left((2\vec{a}+3\vec{b})\vec{a}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{4;0;5\}$, $\vec{b}=\{3;3;\alpha\}$ та $\vec{c}=\{4;1;1\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(6;8;10)$, $B(4;-4;13)$, $C(7;16;11)$, $S(3;6;8)$.

Варіант 18.

1. Дано вектори $\vec{a}=\{2;3;4\}$ та $\vec{b}=\{2;3;-1\}$. Знайти координати векторного добутку: $\left[(\vec{a}-\vec{b}),(\vec{a}+\vec{b})\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{0; -2; 1\}$ та $\vec{b} = \{6; 0; 0\}$.

3. Дано точки $A(-2;1;2)$, $B(1;2;-2)$ та $C(0;2;-1)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P} = \{1;1;2\}$ прикладено до точки $M_0(5;2;5)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;4;1)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(2;0;3)$, $C(0;3;0)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a} = \{2;3;3\}$, $\vec{b} = \{1;-2;3\}$ та $\vec{c} = \{4;2;-1\}$. Обчислити $\left((2\vec{a} + 3\vec{b})\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a} = \{4;3;4\}$, $\vec{b} = \{3;1;4\}$ та $\vec{c} = \{2;\alpha;0\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(-3;3;0)$, $B(-5;-9;3)$, $C(-2;11;1)$, $S(-6;1;-2)$.

Варіант 19.

1. Дано вектори $\vec{a} = \{2;-1;1\}$ та $\vec{b} = \{2;2;-1\}$. Знайти координати векторного добутку: $\left[(2\vec{a} + \vec{b}), (\vec{a} + \vec{b})\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{4;-2;2\}$ та $\vec{b} = \{2;0;2\}$.

3. Дано точки $A(1;2;0)$, $B(1;2;1)$ та $C(5;7;1)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P} = \{1;0;4\}$ прикладено до точки $M_0(2;4;2)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;5;4)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(4;6;1)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a} = \{2;3;3\}$, $\vec{b} = \{1;-2;3\}$ та $\vec{c} = \{4;2;-1\}$. Обчислити $\left((2\vec{c} + 3\vec{a})\vec{a}\vec{b}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{4;5;5\}$, $\vec{b}=\{0;1;1\}$ та $\vec{c}=\{3;\alpha;3\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(4;-4;8)$, $B(2;-16;11)$, $C(5;4;9)$, $S(1;-6;6)$.

Варіант 20.

1. Дано вектори $\vec{a}=\{1;-1;4\}$ та $\vec{b}=\{2;5;-1\}$. Знайти координати векторного добутку: $\left[(2\vec{a}-\vec{b}),(2\vec{a}+\vec{b})\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{3;-2;5\}$ та $\vec{b}=\{2;1;-3\}$.

3. Дано точки $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ та $C(1;2;1)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{4;3;4\}$ прикладено до точки $M_0(3;4;3)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4;3;0)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(2;0;3)$, $C(4;2;1)$ та $D(4;6;1)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{2;3;3\}$, $\vec{b}=\{1;-2;3\}$ та $\vec{c}=\{4;2;-1\}$. Обчислити $\left((\vec{a}+5\vec{b})\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{4;0;4\}$, $\vec{b}=\{5;0;5\}$ та $\vec{c}=\{3;\alpha;1\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(8;5;6)$, $B(2;5;-3)$, $C(1;11;4)$, $S(4;3;1)$.

Варіант 21.

1. Дано вектори $\vec{a}=\{2;-3;4\}$ та $\vec{b}=\{1;2;-1\}$. Знайти координати векторного добутку: $\left[(\vec{a}-4\vec{b}),(\vec{a}+\vec{b})\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{3;-2;1\}$ та $\vec{b}=\{4;-2;-1\}$.

3. Дано точки $A(3;4;-1)$, $B(3;0;-3)$ та $C(5;2;0)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P} = \{1; 5; 4\}$ прикладено до точки $M_0(5; 4; 3)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(4; 2; 2)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(-3; 4; 1)$, $B(2; 0; 3)$, $C(4; 2; 1)$ та $D(3; 0; 5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a} = \{2; 3; 3\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$ та $\vec{c} = \{4; 2; -1\}$. Обчислити $\left(\vec{a}(4\vec{a} + 3\vec{b})\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a} = \{4; 5; 2\}$, $\vec{b} = \{4; 5; 2\}$ та $\vec{c} = \{4; \alpha; 1\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(4; 3; 11)$, $B(-2; 3; 2)$, $C(7; -1; 9)$, $S(3; 1; 6)$.

Варіант 22.

1. Дано точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 1; -1)$ та $C(3; 2; 1)$. Знайти координати векторного добутку $\left[(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{CB}\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = \{2; -2; 0\}$ та $\vec{b} = \{2; 0; 6\}$.

3. Дано точки $A(2; 1; 2)$, $B(3; 2; -1)$ та $C(3; 2; 1)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P} = \{2; 3; 3\}$ прикладено до точки $M_0(5; 1; 5)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(3; 3; 0)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 4; 3)$, $C(4; 2; 1)$ та $D(3; 0; 5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a} = \{3; 4; -1\}$, $\vec{b} = \{2; 3; 5\}$ та $\vec{c} = \{1; 0; 1\}$. Обчислити $\left((\vec{a} - 4\vec{c})(2\vec{a} + 3\vec{b})\vec{a}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a} = \{4; 5; 4\}$, $\vec{b} = \{0; 3; 3\}$ та $\vec{c} = \{4; \alpha; 0\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(2; 4; 10)$, $B(-4; 4; 1)$, $C(5; 0; 8)$, $S(1; 2; 5)$.

Варіант 23.

1. Дано точки $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ та $C(1;2;1)$. Знайти координати векторного добутку $\left[(\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AC}),3\overrightarrow{CB}\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{4;5;1\}$ та $\vec{b}=\{7;3;-1\}$.

3. Дано точки $A(1;2;0)$, $B(0;2;-1)$ та $C(3;2;1)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{1;3;0\}$ прикладено до точки $M_0(4;4;4)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(3;5;0)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(2;0;3)$, $C(4;2;1)$ та $D(6;4;0)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{2;3;5\}$ та $\vec{c}=\{1;0;1\}$. Обчислити $\left((3\vec{a}-2\vec{c})\vec{b}(2\vec{a}+3\vec{b})\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{4;\alpha;0\}$, $\vec{b}=\{1;0;1\}$ та $\vec{c}=\{3;2;1\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(-4;4;6)$, $B(-5;2;6)$, $C(-1;8;4)$, $S(-5;0;1)$.

Варіант 24.

1. Дано точки $A(2;-1;2)$, $B(1;3;-1)$ та $C(3;2;4)$. Знайти координати векторного добутку $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{1;-2;1\}$ та $\vec{b}=\{3;-4;1\}$.

3. Дано точки $A(3;5;-2)$, $B(3;4;1)$ та $C(3;1;1)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{0;4;2\}$ прикладено до точки $M_0(1;4;0)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(3;4;5)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(7;3;5)$, $B(2;0;3)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{2;3;5\}$ та $\vec{c}=\{1;0;1\}$. Обчислити $\left((\vec{a}+3\vec{c})(2\vec{a}+3\vec{b})\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{4;\alpha;2\}$, $\vec{b}=\{3;3;4\}$ та $\vec{c}=\{3;3;4\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(1;5;4)$, $B(0;3;4)$, $C(4;9;2)$, $S(0;1;-1)$.

Варіант 25.

1. Дано точки $A(2;1;2)$, $B(3;2;-1)$ та $C(3;2;1)$. Знайти координати векторного добутку $\left[(\overrightarrow{CB}+4\overrightarrow{AC}),\overrightarrow{CB}\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{3;5;2\}$ та $\vec{b}=\{6;-3;2\}$.

3. Дано точки $A(1;4;-1)$, $B(3;3;1)$ та $C(5;2;6)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{4;0;2\}$ прикладено до точки $M_0(5;1;2)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(3;0;1)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(0;0;2)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{2;3;5\}$ та $\vec{c}=\{1;0;1\}$. Обчислити $\left((3\vec{a}+5\vec{b})\vec{a}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{4;\alpha;1\}$, $\vec{b}=\{4;2;3\}$ та $\vec{c}=\{2;1;0\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(-3;6;3)$, $B(-4;4;3)$, $C(0;10;1)$, $S(-4;2;-2)$.

Варіант 26.

1. Дано точки $A(2;-1;2)$, $B(3;2;4)$ та $C(3;1;1)$. Знайти координати векторного добутку $\left[\overrightarrow{CB},(\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AC})\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{4;-4;2\}$ та $\vec{b}=\{2;-2;1\}$.

3. Дано точки $A(3;4;-2)$, $B(3;4;1)$ та $C(3;2;1)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{3;0;2\}$ прикладено до точки $M_0(0;3;5)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(3;1;4)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(2;0;3)$, $C(5;0;3)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{2;3;5\}$ та $\vec{c}=\{1;0;1\}$. Обчислити $\left((\vec{a}-\vec{c})(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{4;\alpha;4\}$, $\vec{b}=\{5;3;5\}$ та $\vec{c}=\{4;1;4\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(0;5;2)$, $B(-2;-7;5)$, $C(1;13;3)$, $S(-3;3;0)$.

Варіант 27.

1. Дано точки $A(3;5;-2)$, $B(3;4;1)$ та $C(3;1;1)$. Знайти координати векторного добутку $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB}\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{0;0;-1\}$ та $\vec{b}=\{3;0;-2\}$.

3. Дано точки $A(1;3;-2)$, $B(3;0;-3)$ та $C(1;-2;6)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{1;2;4\}$ прикладено до точки $M_0(0;4;1)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(3;1;3)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(2;0;3)$, $C(4;2;1)$ та $D(2;0;2)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{-4;3;-2\}$ та $\vec{c}=\{1;0;1\}$. Обчислити $\left(2\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{4;2;0\}$, $\vec{b}=\{4;\alpha;1\}$ та $\vec{c}=\{2;3;2\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(6;3;4)$, $B(4;-8;6)$, $C(7;10;4)$, $S(3;2;1)$.

Варіант 28.

1. Дано точки $A(3;5;-2)$, $B(3;4;1)$ та $C(2;3;4)$. Знайти координати векторного добутку $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{2;-2;2\}$ та $\vec{b}=\{2;3;3\}$.

3. Дано точки $A(3;5;-2)$, $B(2;4;2)$ та $C(3;1;5)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{5;3;4\}$ прикладено до точки $M_0(3;1;1)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(3;2;2)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(3;4;1)$, $B(2;0;3)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{2;3;5\}$ та $\vec{c}=\{5;-2;-1\}$. Обчислити $\left((2\vec{c}+3\vec{a})\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{4;3;3\}$, $\vec{b}=\{4;\alpha;1\}$ та $\vec{c}=\{4;3;3\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(4;2;6)$, $B(2;-10;9)$, $C(5;10;7)$, $S(1;0;4)$.

Варіант 29.

1. Дано точки $A(3;4;-2)$, $B(3;4;1)$ та $C(3;2;1)$. Знайти координати векторного добутку $\left[\overrightarrow{AB},(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{3;7;1\}$ та $\vec{b}=\{2;-3;1\}$.

3. Дано точки $A(1;2;0)$, $B(3;1;-3)$ та $C(3;2;2)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{3;5;0\}$ прикладено до точки $M_0(0;2;1)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(3;1;5)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(4;5;1)$, $C(4;2;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{2;3;5\}$ та $\vec{c}=\{3;-2;-1\}$. Обчислити $\left((\vec{c}-\vec{a})(2\vec{a}+3\vec{b})\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{4;3;0\}$, $\vec{b}=\{1;\alpha;4\}$ та $\vec{c}=\{4;3;0\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(5;3;13)$, $B(-1;3;4)$, $C(8;-1;11)$, $S(4;1;8)$.

Варіант 30.

1. Дано точки $A(3;5;-2)$, $B(2;4;2)$ та $C(3;1;5)$. Знайти координати векторного добутку $\left[\overrightarrow{BA},(\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{CA})\right]$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}=\{3;4;1\}$ та $\vec{b}=\{2;3;6\}$.

3. Дано точки $A(1;2;3)$, $B(3;0;-3)$ та $C(5;2;6)$. Знайти площу трикутника ABC.

4. Силу $\vec{P}=\{3;3;4\}$ прикладено до точки $M_0(0;4;2)$. Визначити момент та направляючі косинуси цієї сили відносно точки $A(3;5;2)$.

5. Чи лежать чотири точки $A(1;2;3)$, $B(2;0;3)$, $C(5;6;1)$ та $D(3;0;5)$ в одній площині?

6. Дано вектори $\vec{a}=\{2;4;-1\}$, $\vec{b}=\{3;-1;0\}$ та $\vec{c}=\{3;-2;-2\}$. Обчислити $\left((\vec{a}+\vec{b})\vec{a}\vec{c}\right)$.

7. Підберіть α так, щоб вектори $\vec{a}=\{5;0;0\}$, $\vec{b}=\{4;\alpha;2\}$ та $\vec{c}=\{5;5;2\}$ були компланарні.

8. Обчислити висоту SH піраміди $ABCS$, якщо $A(1;7;6)$, $B(-2;5;6)$, $C(2;11;4)$, $S(-2;3;1)$.

Практичне заняття 5
Системи координат.
Полярна, сферична і циліндрична системи координат.

Основні теоретичні відомості

5.1. Системи координат

Системою координат на площині або у просторі називають сукупність умов для визначення положення точки і ототожнення її з набором (парою – у площині і трійкою – у просторі) впорядкованих дійсних чисел.

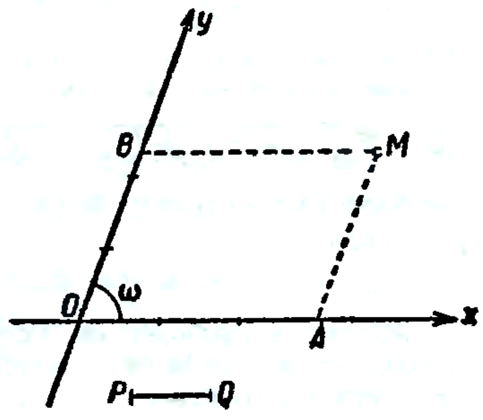
5.2. Косокутна система координат

Нехай нам задана система координат на площині. Кут між додатнім напрямом координатної вісі абсцис Ox та додатнім напрямом координатної вісі ординат Oy називається *координатним кутом* ω.

Якщо координатний кут не прямий, система координат називається *косокутною*.

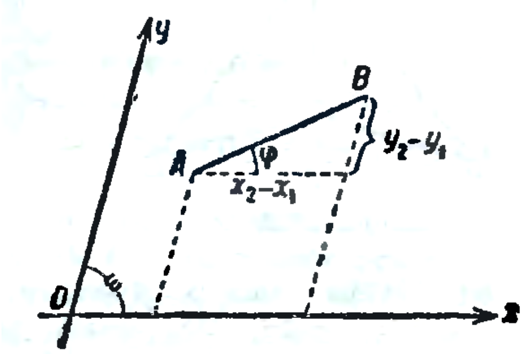
Для того, щоб визначити координати точки $M(x_M; y_M)$ в даній системі координат, проводимо через цю точку прямі, паралельні координатним осям. Тоді

Абсциса $x_M = \dfrac{BM}{PQ} = \dfrac{OA}{PQ}$, а ордината $y_M = \dfrac{AM}{PQ} = \dfrac{OB}{PQ}$



Косокутні координати точки не дорівнюють відстані від цієї точки до координатних осей.

В косокутній системі координат геометричні величини обчислюються за формулами, які містять координатний кут ω.



Відстань між двома точками $A(x_A; y_A)$ та $B(x_B; y_B)$ знаходиться за формулою:

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + 2\left(x_B - x_A\right)\left(y_B - y_A\right)\cos\omega}$$

Відстань від точки $M(x; y)$ до початку координат виражається формулою:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega}$$

Між координатами кінців відрізку AB та кутом φ, утвореним цим відрізком з додатнім напрямом вісі Ox, існує співвідношення:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\omega - \varphi)}.$$

Перетворивши даний вираз, отримаємо формулу для визначення кута φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\left(y_B - y_A\right)\cdot\sin\omega}{\left(x_B - x_A\right) + \left(y_B - y_A\right)\cdot\cos\omega}.$$

Площа трикутника, який задано координатами трьох точок $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ та $C(x_C; y_C)$, що є його вершинами, обчислюється за формулою:

$$S = \left|\frac{\sin\omega}{2}\left[x_A\left(y_B - y_C\right) + x_B\left(y_C - y_A\right) + x_C\left(y_A - y_B\right)\right]\right|$$

Формули, що характеризують взаємне розміщення точок, залишаються такими ж, як у прямокутній системі координат.

Так, умова того, що три точки лежать на одній прямій, виражається рівністю:

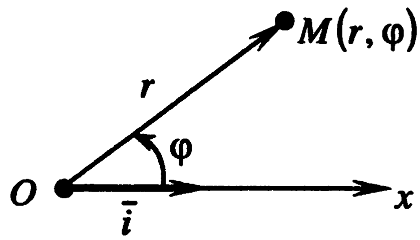
$$x_A\left(y_B - y_C\right) + x_B\left(y_C - y_A\right) + x_C\left(y_A - y_B\right) = 0$$

Координати точки, яка ділить відрізок між $A(x_A; y_A)$ та $B(x_B; y_B)$ у відношенні λ:

$$x=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}; \quad y=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}.$$

5.2. Полярна система координат

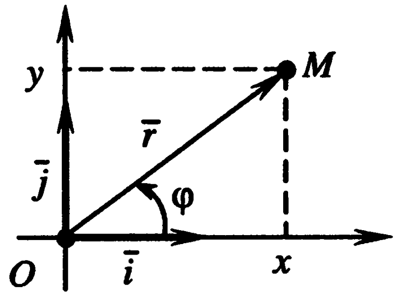
Полярною системою координат на площині називається сукупність точки *O*, яка називається *полюсом*, та півпрямої *Ox*, яка називається *полярною віссю*. Як правило, на полярній осі обирається вектор $\vec{i}$, початок якого співпадає з полюсом *O*, довжина якого приймається за величину *масштабного відрізка*, а напрям задає додатній напрям на полярній осі.



Положення довільної, відмінної від *O*, точки *M* в полярній системі координат визначається відстанню ρ (*полярним радіусом*) від цієї точки *M* до полюса (тобто, $\rho=\left|\overrightarrow{OM}\right|$) та кутом φ (*полярним кутом*) між полярною віссю та вектором $\overrightarrow{OM}$. Полярний радіус та полярний кут складають *полярні координати* точки *M*, і записуються $M(\rho;\varphi)$. Полярний кут вимірюється в радіанах та відраховується від полярної осі в додатному напрямку (проти напрямку годинникової стрілки, якщо значення кута додатне, або у від'ємному напрямку, в напрямку руху годинникової стрілки, якщо значення кута від'ємне.

Полярний радіус визначений для кожної точки площини та приймає невід'ємні значення $\rho\geq 0$. Полярний кут визначений для будь-якої точки площини, крім точки О, та приймає значення $-\pi<\varphi\leq\pi$, які називаються головними значеннями полярного кута. В інших випадках полярний кут визначений до $2\pi n$, де $n\in Z$. В цих випадках значенням $\varphi+2\pi n$ полярного кута для всіх $n\in Z$ відповідає один і той самий напрям радіус-вектора.

З полярною системою координат *O*ρφ можна пов'язати прямокутну систему координат $O\vec{i}\,\vec{j}$, початок *O* якої співпадає з полюсом, а додатній напрям вісі абсцис *Ox* – з полярною віссю. Вісь ординат при цьому добудовується перпендикулярно до осі абсцис таким чином, щоб утворилась права прямокутна система координат. Довжини базисних векторів визначаються масштабним відрізком на полярній вісі.



Якщо на площині задано прямокутну декартову систему координат, то, прийнявши додатню піввісь абсцис Ox за полярну вісь, отримуємо полярну систему координат.

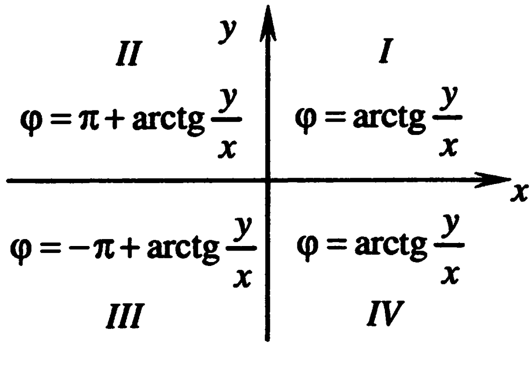
Прямокутні координати x та y точки M, відмінної від точки O, та її полярні координати ρ та φ пов'язує формула:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

Зворотній перехід відбувається за формулами:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Останні дві рівності визначають полярний кут з точністю до доданків $2\pi n$, де $n \in Z$. При $x \neq 0$ з них випливає, що $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$. Головне значення полярного кута φ $(-\pi < \varphi \le \pi)$ знаходиться за формулами:

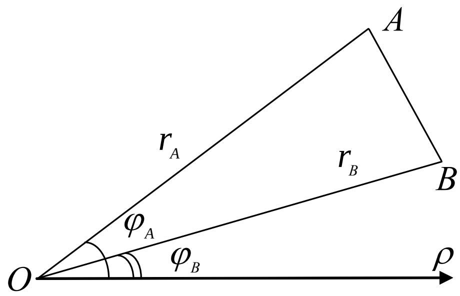


$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Головне значення полярного кута можна вибрати іншим чином, наприклад, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Відстань між двома точками $A(\rho_A;\varphi_A)$ та $B(\rho_B;\varphi_B)$, або довжина відрізка *AB*, обчислюється за формулою:

$$|AB| = \sqrt{\rho_A^2 + \rho_B^2 - 2\rho_A\rho_B\cos(\varphi_A - \varphi_B)}$$



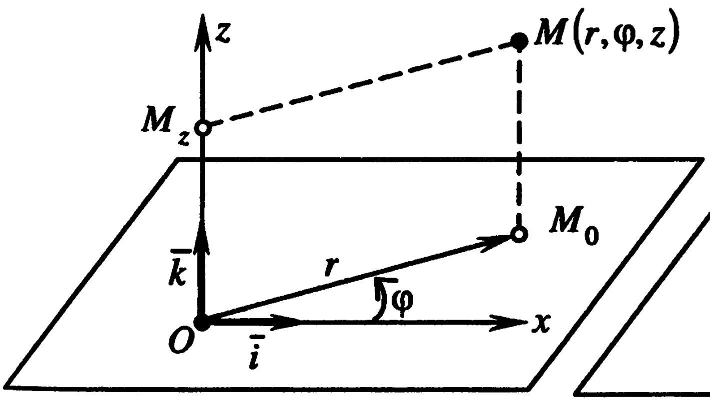
Площа трикутника *OAB*, одна з вершин якого співпадає з полюсом *O*, а дві інші задаються точками $A(\rho_A;\varphi_A)$ та $B(\rho_B;\varphi_B)$:

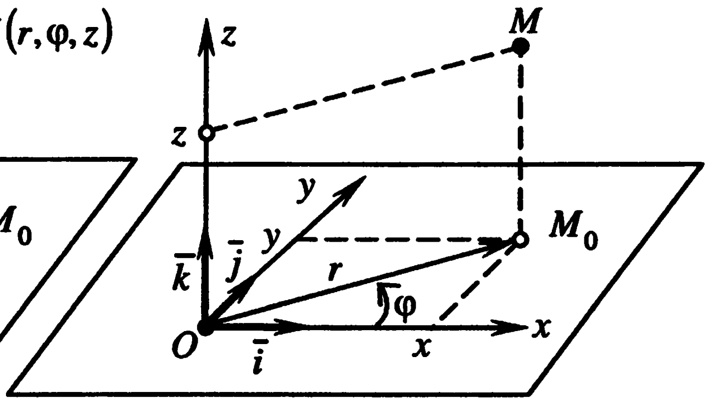
$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\rho_A\rho_B\sin|\varphi_A - \varphi_B|.$$

5.3. Циліндрична система координат

Для побудови циліндричної системи координат в просторі обирається площина (*основна площина*) і на ній задається полярна система координат з полюсом *O* та полярною віссю *Ox*. Через точку *O* перпендикулярно до основної площини проводиться вісь *Oz* (вісь аплікат). Напрям вісі аплікат обирається таким чином, щоб зростання полярного кута, яке спостерігається зі сторони додатного напряму вісі *Oz*, відбувалось проти годинникової стрілки.

В циліндричній системі координат положення точки *M*, яка не лежить на осі аплікат, визначається полярними координатами ρ та φ точки M_0, яка є ортогональною проекцією точки *M* на основну площину, і аплікатою *z* – координатою точки M_z – ортогональною проекцією точки *M* на вісь аплікат. Таким чином, циліндричні координати точки *M* – це впорядкована трійка чисел ρ $(\rho \geq 0)$ – полярний радіус, φ $(-\pi < \varphi \leq \pi)$ – полярний кут та *z* $(-\infty < z < +\infty)$ – апліката. У точок, які лежать на осі аплікат, не визначений полярний кут, і вони задаються нульовим полярним радіусом та аплікатою.





З циліндричною системою координат $O\rho\varphi z$ можна зв’язати прямокутну систему координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, у якої початок та базисні вектори $\vec{i}, \vec{k}$ співпадають з початком циліндричної системи координат та одиничними векторами на полярній осі та осі аплікат відповідно, а базисний вектор $\vec{j}$ обирається таким чином, щоб трійка векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ була правою.

Якщо в просторі прийняти додатну піввісь абсцис за полярну вісь, то з прямокутної системи координат отримаємо циліндричну систему координат, яка з нею зв’язана.

Формули, які зв’язують між собою прямокутні координати x, y, z точки *M* та її циліндричні координати ρ, φ, z, мають такий вигляд:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Апліката z точки M в прямокутній та циліндричній системах співпадає.

Для того, щоб знайти циліндричні координати з відомих прямокутних координат, необхідно застосувати формули:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ z = z. \end{cases}$$

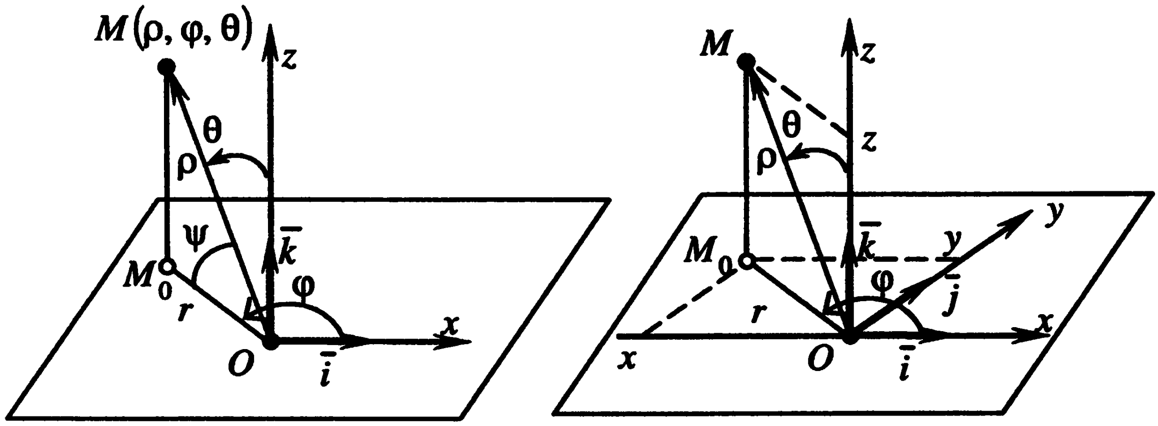
Головне значення полярного кута φ $(-\pi < \varphi \leq \pi)$ знаходиться за тим самим принципом, як і в полярній системі координат.

5.4. Сферична система координат

Для побудови сферичної системи координат в просторі обирається площина (основна площина) і на ній задається полярна система координат з полюсом O (початок сферичної системи координат), та полярною віссю Ox. Через точку O перпендикулярно до основної площини проводиться вісь Oz (вісь аплікат). Її напрям обирається таким чином, щоб зростання полярного кута зі сторони додатного напряму вісі Oz було проти годинникової стрілки.

В сферичні системі координат положення точки M, яка не лежить та вісі аплікат, визначається відстанню $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ до початку координат, полярним кутом φ точки M_0 – ортогональної проекції точки M на основну площину, та кутом θ між вектором $\overrightarrow{OM}$ і додатнім напрямом вісі аплікат.

Таким чином, циліндричні координати точки M – це впорядкована трійка чисел ρ $(\rho \geq 0)$ – радіус, φ $(-\pi < \varphi \leq \pi)$ – довгота та θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ – широта. У точок, які лежать на осі аплікат, не визначена довгото, і вони задаються радіусом ρ та широтою $\theta = 0$ для додатної чистини вісі Oz, або $\theta = \pi$ для від'ємної її частини. Початок координат задається нульовим значенням радіуса ρ.



а *б*

Іноді замість кута θ широтою називають кут $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$, який набуває значень $-\dfrac{\pi}{2} \le \psi \le \dfrac{\pi}{2}$.

З сферичною системою координат $O\rho\varphi\theta$ можна зв'язати прямокутну систему координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, у якої початок та базисні вектори $\vec{i}, \vec{k}$ співпадають з початком сферичної системи координат та одиничними векторами на полярній осі Ox та осі аплікат Oz відповідно, а базисний вектор $\vec{j}$ обирається таким чином, щоб трійка векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ була правою.

Якщо в просторі прийняти додатну піввісь абсцис за полярну вісь, то з прямокутної системи координат отримаємо сферичну систему координат, яка з нею зв'язана.

Формули, які зв'язують між собою прямокутні координати x, y, z точки M та її сферичні координати ρ, φ, θ, мають такий вигляд:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta, \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta, \\ z = \rho \cdot \cos\theta. \end{cases}$$

Для того, щоб знайти сферичні координати з відомих прямокутних координат, необхідно застосувати формули:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{\rho} = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{cases}$$

Формула визначає довготу з точністю до доданків $2\pi n$, де $n \in Z$. При $x \neq 0$ з них випливає, що $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$. Головне значення довготи φ $(-\pi < \varphi \leq \pi)$ знаходиться за тим самим принципом, як і в полярній системі координат.

Питання для самоперевірки

1. Що називається полярною системою координат?
2. Які основні елементи полярної системи координат?
3. Як зміняться полярні координати точки M $(\rho;\varphi)$, якщо залишити без зміни полюс O, полярну вісь Ox, але змінити на зворотній додатній напрямок обходу?
4. Який зв’язок між полярними і прямокутними декартовими координатами точки на площині? (формули).
5. Скільки осей має полярна система координат?
6. Як розташовані точки на площині, полярні координати яких задовольняють одній з наступних умов: а) ρ=3; б) $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$?
7. Який геометричний зміст полярних координат $(r;\varphi)$?
8. Що можна сказати про полярні координати точок, симетричних відносно: а) полюса; б) полярної осі?

Методичні вказівки до розв'язання задач

Приклад 1. На осях координат знайти точки, кожна з яких рівновіддалена від точок $A(1; 1)$ і $B(3; 7)$.

Розв'язання: Нехай M_1 і M_2 – точки, які потрібно знайти, і точка M_1 лежить на осі Ox, тоді її координати $(x; 0)$; точка M_2 лежить на осі Oy, тоді її координати $(0; y)$.

Так як точки M_1 і M_2 однаково віддалені від точок A і B, то $M_1A = M_1B$ і $M_2A = M_2B$.

За формулою $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ маємо:

$$\sqrt{(1-x)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (7-0)^2},$$

$$\sqrt{(1-0)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (7-y)^2}.$$

Розв'язуючи одержані рівняння, знайдемо x=14 і $y=\frac{14}{3}$.

Тоді $M_1(14;0)$ і $M_2\left(0;\frac{14}{3}\right)$.

Відповідь: $M_1(14;0)$ і $M_2\left(0;\frac{14}{3}\right)$.

Приклад 2. Визначити площу паралелограма, три вершини якого лежать в точках $A(-2; 3)$, $B(4; -5)$ і $C(-3; 1)$.

Розв'язання: Площа S паралелограма, яку потрібно знайти, дорівнює подвоєній площі трикутника ABC, тобто $S=2S_{\Delta ABC}$.

Тоді, за формулою, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 y_1 1 \\ x_2 y_2 1 \\ x_3 y_3 1 \end{matrix}\right\|$ маємо:

$$S = 2S_{\Delta ABC} = 2\cdot\frac{1}{2}\left|\left[(4-(-2))(1-3)-(-3-(-2))(-5-3)\right]\right| = 20.$$

Відповідь: S=20.

Приклад 3. Три послідовні вершини паралелограма мають координати $A(3; -3)$, $B(-1; 1)$ і $C(1; 6)$. Знайти координати четвертої вершини D.

Розв'язання: Відомо, що діагоналі паралелограма в точці перетину E діляться навпіл, знайдемо цю точку як середину відрізка AC.

Якщо її координати позначити через x_1 і y_1, то за формулами

$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ маємо: $x_1=\dfrac{3+1}{2}=2$, $y_1=\dfrac{-3+6}{2}=\dfrac{3}{2}$, $E\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$.

А якщо через x_2 і y_2 – координати точки D, то за формулами $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ маємо: $2=\dfrac{-1+x_2}{2}$, $\dfrac{3}{2}=\dfrac{1+y_2}{2}$, звідки $x_2=5$, $y_2=2$, $D(5;\ 2)$.

Відповідь: $D\ (5;\ 2)$.

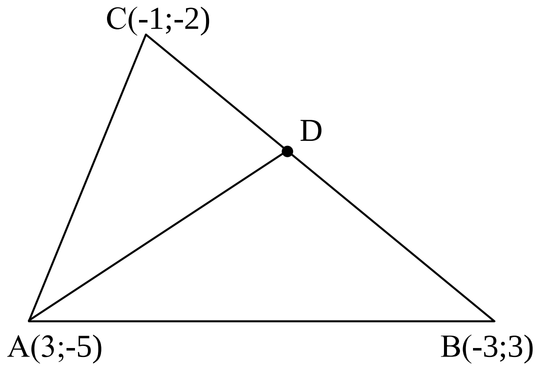
Приклад 4. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(3;\ -5)$, $B(-3;3)$ і $C(-1;\ -2)$. Знайти довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.

Розв'язання: Відомо, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, які пропорційні довжинам прилеглих сторін.

Знайдемо довжини цих сторін:

$$AB=\sqrt{(-3-3)^2+(3+5)^2}=10,$$

$$AC=\sqrt{(-1-3)^2+(-2+5)^2}=5.$$



Тоді, якщо $D\ (x;\ y)$ – точка перетину бісектриси і сторони BC, то вона ділить цю сторону у відношенні

$$\lambda=\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{10}{5}=2.$$

Тепер знайдемо координати точки D:

$$x=\frac{-3+2\cdot(-1)}{1=2}=-\frac{5}{3},\ y=\frac{3+2\cdot(-2)}{1+2}=-\frac{1}{3},\ D=\left(-\frac{5}{3};\frac{-1}{3}\right).$$

Знайдемо довжину бісектриси:

$$AD=\sqrt{\left(-\frac{5}{3}-3\right)^2+\left(\frac{1}{3}+5\right)^2}=\frac{14\sqrt{2}}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{14\sqrt{2}}{3}$.

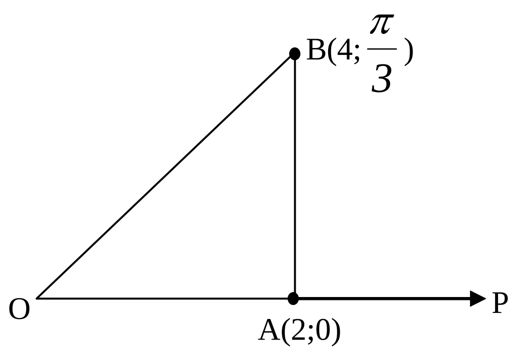
Приклад 5. Знайти центр ваги однорідного стержня з кінцями в точках $A(5;-4)$ і $B(7;8)$.

Розв'язання: Так як центр мас однорідного стержня розташований в його середині, то потрібно знайти середину відрізка AB, $x=\dfrac{5+7}{2}=6$; $y=\dfrac{-4+8}{2}=2$.

Центр мас однорідного стержня AB знаходиться в точці $C(6;2)$.

Відповідь: $C(6;\ 2)$.

Приклад 6. Знайти радіус вписаного в трикутник кола, якщо одна його вершина лежить в полюсі полярної системи координат, а інші в точках $A(2;0)$, $B\left(4;\dfrac{\pi}{3}\right)$.



Розв'язання:

Скористаємось відомою з елементарної геометрії формулою $r=\dfrac{S}{p}$, де S – площа трикутника, а p – його півпериметр. Площу трикутника обчислимо за формулою $S=\dfrac{1}{2}\rho_1\rho_2\left|\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right|$.

Довжини двох сторін трикутника, а саме OA і OB, відомі, вони рівні відповідно 2 і 4. Довжину сторони AB знайдемо за формулою:

$AB=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cdot\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$.

Тоді $S=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-0\right)\right|=2\sqrt{3}$,

$$AB=\sqrt{2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3},\text{ і}$$

$$r=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\left(2+4+2\sqrt{3}\right)}=\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1.$$

Відповідь: $r=\sqrt{3}-1$.

Приклад 7. В полярній системі координат дано точки $A\left(3;\dfrac{\pi}{3}\right)$ і $B\left(1;\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Полярну вісь повернуто так, що у новому положенні вона проходить через точку A. Визначити координати точки B у новій системі координат.

Розв'язання: Нова система координат утворена поворотом полярної осі на кут, величина якого дорівнює $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Тоді нові координати ρ' і θ' точки B будуть наступними: $\rho'=1$, $\theta'=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$, $B\left(1;\frac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь: $B\left(1;\frac{\pi}{3}\right)$.

Приклад 8. Знайти полярні координати точки A, якщо в прямокутній декартовій системі координат вона має координати $x=-1$, $y=\sqrt{3}$ (полярна вісь співпадає з додатною піввіссю Ox).

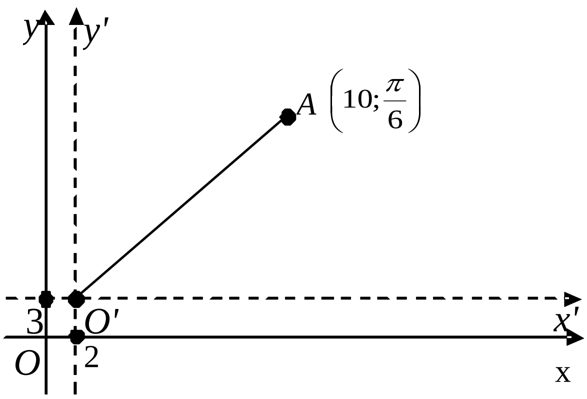
Розв'язання: За відомими формулами маємо: $\rho=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$, $tg\,\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Так як точка A лежить в другій координатній чверті ($x<0$, $y>0$), то $\theta=\frac{2\pi}{3}$, $A\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь: $A\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$.

Приклад 9. Знаючи полярні координати точки $A\left(10;\frac{\pi}{6}\right)$, знайти її прямокутні декартові координати, якщо полюс O' в декартовій системі координат має координати (2; 3), а полярна вісь паралельна осі Ox і співпадає з нею за напрямком.

Розв'язання:

Введемо допоміжну прямокутну декартову систему координат $O'X'Y'$, початок O' і вісь $O'X'$ співпадає з полярною віссю.



Тоді координати точки А в полярній системі і в системі $O'X'Y'$ зв'язані співвідношеннями $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$.

Звідки $x'=10\cos\frac{\pi}{6}=5\sqrt{3}$,

$y' = 10\sin\dfrac{\pi}{6} = 5$, а її координати в системах OXY і $O'X'Y'$ зв'язані співвідношеннями $x=x'+a$, $y=y'+b$ (перетворення прямокутних декартових координат при паралельному переносі осей). Тоді остаточно маємо: $x = 5\sqrt{3}+2$, $y = 5+3 = 8$, $A(5\sqrt{3}+2;8)$.

Відповідь: $A(5\sqrt{3}+2;8)$.

Приклад 10. В точках $M_1(x_1;y_1)$; $M_2(x_2;y_2)$ і $M_3(x_3;y_3)$ зосереджені маси m_1, m_2, m_3. Знайти центр ваги цієї системи.

Розв'язання: Знайдемо спочатку центр ваги $M'(x';y')$ системи двох мас m_1 і m_2, зосереджених в точках M_1 і M_2. З механіки відомо, що центр ваги цих мас ділить відрізок M_1M_2 на частини, обернено пропорційні масам, зосередженим на кінцях відрізка, тобто у відношенні $\lambda=\dfrac{m_2}{m_1}$.

За формулою $x = \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y = \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ знайдемо координати точки M':

$$x' = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2}{m_1+m_2},\quad y' = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{y_1m_1 + y_2m_2}{m_1+m_2}.$$

Якщо точка $M\,(x;\,y)$ – центр ваги системи трьох мас m_1, m_2, m_3, то вона ділить відрізок $M'M_3$ на частини пропорційні масам, зосередженим в точках M' і M_3, тобто у відношенні $\lambda=\dfrac{m_3}{m_1+m_2}$. Тоді

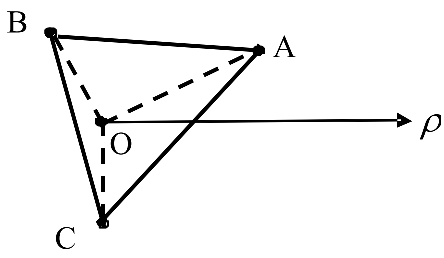
$$x = \frac{x + \frac{m_3}{m_1+m_2}x_2}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3}{m_1+m_2+m_3},\quad y = \frac{y + \frac{m_3}{m_1+m_2}y_2}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}} = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Приклад 11. Одна з вершин трикутника OAB знаходиться в полюсі O, дві інші в точках $A\left(4;\dfrac{\pi}{9}\right)$ і $B\left(1;\dfrac{5\pi}{18}\right)$. Визначити площу цього трикутника.

Розв'язання: Площа трикутника в полярній системі координат, якщо одна з його вершин співпадає з полюсом, обчислюється за формулою: $S=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin|\varphi_2-\varphi_1|$ Тоді маємо: $S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\sin\left(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{9}\right)=1.$

Відповідь: $S=1$.

Приклад 12. Знайти площу трикутника з вершинами в точках $A\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(3;\frac{2\pi}{3}\right)$, $C\left(4;\frac{3\pi}{2}\right)$.



Розв'язання:

Оскільки полюс O лежить всередині трикутника ABC, то

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}+S_{\Delta COA},$$

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot r_A\cdot r_B\cdot Sin|\varphi_A-\varphi_B|=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot Sin\left|\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right|=3\cdot Sin\frac{\pi}{2}=3,$$

$$S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}\cdot r_B\cdot r_C\cdot Sin|\varphi_B-\varphi_C|=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot Sin\left|\frac{3\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right|=6\cdot Sin\frac{5\pi}{6}=3,$$

$$S_{\Delta COA}=\frac{1}{2}\cdot r_C\cdot r_A\cdot Sin|\varphi_C-\varphi_A|=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot Sin\left|\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right|=4\cdot Sin\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3}.$$

Відповідь. $S_{\Delta ABC}=6+2\sqrt{3}.$

Приклад 13. В циліндричній системі координат $O\rho\varphi z$:

1) знайти циліндричні координати точки А, якщо відомо її прямокутні координати $A(4,-3,2)$;
2) знайти прямокутні координати точки В, якщо відомо її циліндричні координати $\rho_B=2,\ \varphi_B=\frac{2\pi}{3},\ z_B=1$;

Розв'язання: 1) Знайдемо циліндричні координати точки $A(4,-3,2)$. Апліката $z_A=2$, полярний радіус і полярний кут знаходимо за формулами: $\rho_A=\sqrt{x_A^2+y_A^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$; $\varphi_A=arctg\frac{y_A}{x_A}=arctg\frac{-3}{4}=-arctg\frac{3}{4}$; $z_A=2$.

2) Знайдемо прямокутні координати точки В. За формулами $x_B=\rho_B\cdot\cos\varphi_B=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$; $y_B=\rho_B\cdot\sin\varphi_B=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$; $z_B=1$.

*Відповідь:*1) $(5, -arctg\frac{3}{4}, 2)$, 2) $(-1, \sqrt{3}, 1)$.

Приклад 14. В сферичній системі координат $O\rho\varphi\theta$:

1) знайти сферичні координати ρ, φ, θ точки А, якщо відомо її прямокутні координати $A(4, -3, 12)$;
2) знайти прямокутні координати x, y, z точки В, якщо відомо її сферичні координати: $\rho = 4,\ \varphi = \frac{2\pi}{3},\ \theta = \frac{3\pi}{4}$;

Розв'язання: 1) Знайдемо сферичні координати точки $A(4, -3, 12)$. За формулами отримуємо $\rho = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 12^2} = 13;\ \varphi = -arctg\frac{3}{4};\ \theta = arccos\frac{12}{13}$.

2) За формулами отримуємо

$$x = \rho \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{6}$$

$$z = \rho \cdot \cos\theta = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

Відповідь: 1) $(13, -arctg\frac{3}{4}, arccos\frac{12}{13})$; 2) $(-\sqrt{2}, \sqrt{6}, -2\sqrt{2})$.

Вправи для аудиторної і самостійної роботи

1. На осі OZ знайти точку, яка рівновіддалена від даних точок $A(-4; 1; 7)$, $B(3; 5; -2)$.

2. На координатній площині YOZ знайти точку, рівновіддалену від трьох даних точок $A(3; 1; 2)$, $B(4; -2; -2)$, $C(0; 5; 1)$.

3. Дві вершини трикутника ABC мають координати $A(3;6)$ і $B(-3;5)$. Визначити координати вершини C при умові, що середини сторін AC і BC лежать на різних осях координат.

4. Дано трикутник ABC: $A(4;1)$, $B(7;5)$, $C(-4;7)$. Обчислити довжину бісектриси AD кута BAC.

5. Вершинами трикутника служать точки $A(2;2)$, $B(-5;1)$, $C(3;-5)$. Знайти центр кола, описаного навколо цього трикутника.

6. Трикутник ABC задано полярними координатами його вершин $A\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8;\frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(3;\frac{7\pi}{6}\right)$. Довести, що даний трикутник рівнобедрений.

7. Вершини трикутника знаходяться в точках $A\left(2\sqrt{3};\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{3};\frac{2\pi}{3}\right)$, $C\left(4+\sqrt{3};\frac{2\pi}{3}\right)$. Довести, що цей трикутник прямокутний.

8. Дано полярні координати вершин трикутника ABC: $A\left(10;\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(16;\frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(7;\frac{7\pi}{6}\right)$. Довести, що цей трикутник правильний.

9. Знайти полярні координати точок, симетричних з точками $M_1\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(3;\frac{\pi}{3}\right)$, $M_3\left(3;-\frac{\pi}{3}\right)$: а) відносно полюса; б) відносно полярної осі.

10. Знайти площу квадрату, дві суміжні вершини якого знаходяться в точках $A(5;6)$ і $B(9;2)$.

11. Знайти площу рівностороннього трикутника, дві вершини якого знаходяться в точках $A(-3;-5)$ і $B(5;3)$.

12. Нехай $A(6;-10)$, $B(-2;4)$ – кінці однорідного стержня. Знайти координати його центра ваги.

13. Центр ваги однорідного стержня знаходиться в точці $C(-5;3)$, один з його кінців – в точці $A(-8;5)$. Знайти координати другого кінця стержня.

14. Довести, що координати точки перетину медіан трикутника з вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ визначаються формулами: $X=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$; $Y=\frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3}$.

15. В точці $A(3;4)$ розміщено вантаж вагою 60, в точці $B(-2;-1)$ – вантаж вагою 40. Знайти координати центра ваги цієї системи.

16. У вершинах трикутника $A(-1;5)$, $B(1;1)$, $C(2;-1)$ зосереджені відповідно ваги 50, 40, 60. Знайти центр ваги даною системи.

17. Задано чотирикутник $ABCD$: $A(4;4)$, $B(5;7)$, $C(10;10)$, $D(12;4)$. Знайти координати центра ваги.

18. Дано квадрат $ABCD$: $A(-2;1)$, $B(3;3)$. Знайти координати двох інших вершин квадрата.

19. Дано трикутник ABC: A(-2;1), B(2;-2), C(8;6). Знайти: а) периметр трикутника; б) площу трикутника; в) довжини висот; г) косинус кута А.

20. Коло проходить через точку B(-10;4), A(-6;0) – точка дотику кола з віссю Ох. Знайти координати центра кола і довжину радіуса.

21. В прямокутній системі координат $Oxyz$ задано точки $A(3,4,,5)$ та $B(6,6,-7)$. Знайти координати точки А в циліндричній системі координат $O\rho\varphi z$, а точки B в сферичній системі координат $O\rho\varphi\theta$.

Відповіді:

1. (0,0,14/19); **2.** (0, 27/23,-49/23); **3.** (-3;-5), (3;-6); **4.** $\frac{10\sqrt{2}}{3}$; **5.** $(-\frac{3}{7};-\frac{47}{21})$; **9.** *а*) $M'_1(2,-\frac{3\pi}{4})$, $M'_2(3,-\frac{2\pi}{3})$, $M'_3(1,-\frac{3\pi}{4})$, б) $M''_1(2,-\frac{\pi}{4})$, $M''_2(3,-\frac{\pi}{3})$, $M''_3(1,-\frac{\pi}{4})$; **10.** 32; **11.** $32\sqrt{3}$; **12.** (2;-3); **13.** (-2;1); **15.** (1;2); **16.** $(1;\frac{17}{5})$; **17.** (41/3;31/3); **18.** C(5;-2), D(0;-4); C'(1;8), D'(-4;6); **19.** а) $15+5\sqrt{5}$; б) 25; в) $2\sqrt{5}$, 5, 10; г)$\frac{\sqrt{5}}{5}$; **20.** (-6,4); 4; **21.** $A(5, arctg\frac{4}{3}, 5)$; $B(11, \frac{\pi}{4}, \pi - arccos\frac{7}{11})$.

Індивідуальне завдання 4

Варіант № 1

1. Знайти відношення, в якому площина *ХОУ* ділить відрізок *АВ*, якщо *А*(3;-6;-1) і *В*(9;7;5).

2. Вершини трикутника *АВС* знаходяться в точках *А*(4;1), *В*(7;5) і *С*(-4;7). Знайти довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині *А*.

3. Визначити площу трикутника, вершини якого мають координати *А*(4;2), *В*(9;4), *С*(7;6).

4. Визначити полярні координати точок, симетричних відносно полярної осі точкам $M_1\left(3;\frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(2;-\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(3;-\frac{\pi}{3}\right)$.

5. В полярній системі координат дано дві суміжні вершини квадрату $M_1\left(12;-\frac{\pi}{10}\right)$ і $M_2\left(3;\frac{\pi}{15}\right)$. Визначити його площу.

6. На осі *OZ* знайти точку, рівновіддалену від точок: $A(-4;1;7)$ та $B(3;5;-2)$.

Варіант № 2

1. Знайти координати точки, яка рівновіддалена від трьох даних точок *А*(2;2), *В*(5;1), *С*(7;-3).

2. Задані координати кінців *А* (-1;5) і *В*(3;4) однорідного стержня. Визначити координати його центру ваги.

3. Визначити площу п’ятикутника, вершинами якого є точки *А*(-2;0), *В*(0;-1), *С*(2;0), *D*(3;2), *E* (-1;3).

4. Визначити полярні координати точок симетричних відносно полюса точкам $M_1\left(1;\frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$, $M_4\left(4;\frac{5\pi}{6}\right)$.

5. В полярній системі координат дано дві протилежні вершини квадрату $P\left(6;-\frac{7\pi}{12}\right)$, $Q\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$. Визначити його площу.

6. Дано вершини трикутника *А*(3;-5), *В*(1;-3), *С*(2;-2). Обчисліть довжину бісектриси його зовнішнього кута при вершині *В*.

Варіант № 3

1. На осі *Оу* знайдіть точку *Q*, відстань від якої до точки *P*(-2;7) рівно $\sqrt{68}$.

2. Дано координати точок P (-1; 5), Q (3; 2). Знайти координати точки M, симетричній точці Р відносно точки Q.

3. Дано дві суміжні вершини паралелограма A(-1;3), B(2;-1). Знайти дві інші його вершини за умови, що діагоналі паралелограма паралельні осям координат.

4. В полярній системі координат дано дві вершини $A\left(3;-\frac{4\pi}{9}\right)$, $B\left(5;\frac{3\pi}{14}\right)$ паралелограму $ABCD$, точка перетину діагоналей якого співпадає з полюсом. Визначити дві інші вершини цього паралелограму.

5. В полярній системі координат дано дві вершини правильного трикутника $A\left(4;-\frac{\pi}{12}\right)$, $B\left(8;\frac{7\pi}{12}\right)$. Визначити його площу.

6. Знайти відстань між двома точками, які мають однакові координати (x=1 та y=2) відносно двох різних прямокутних систем координат, якщо друга система отримується з першої перенесенням початку в точку O'(3;4) без зміни напрямку осей.

Варіант № 4

1. На осі Ox знайдіть точку B, відстань від якої до точки A(3;-5) дорівнює $5\sqrt{2}$.

2. Дано координати точок P (-1; 5), Q (3; 2). Знайти координати точки N, симетричній точці Q відносно точки P.

3. Знайдіть координати центра ваги M трикутника, вершини якого знаходяться в точках A (13;5), B (4;-3) та C (-2;4).

4. В полярній системі координат дано точки $A\left(8;-\frac{2\pi}{3}\right)$ і $B\left(6;\frac{\pi}{3}\right)$. Визначити полярні координати середини відрізка, який з'єднує точки A і B.

5. Одна з вершин трикутника OAB знаходиться в полюсі, дві інші $A(\rho_1;\theta_1)$ і $B(\rho_2;\theta_2)$. Визначити площу цього трикутника.

6. Відносно деякої системи координат точка A має координати: x=7 та y=-5. обчислити координати цієї ж точки при умові, що початок координат перенесено в одну з наступних точок: $O_1(2;3)$, $O_2(-4;7)$, $O_3(3;-9)$, $O_4(-1;-2)$, $O_5(3;-5)$.

Варіант № 5

1. Визначити радіус кола, яке проходить через точку (-2;1) і має центр в точці (2;-3).

2. Дано дві суміжні вершини паралелограма $A(-4;4)$, $B(2;8)$ і точка перетину $M(2;2)$ його діагоналей. Визначити дві інші вершини C і D.

3. Обчислити периметр та площу трикутника по координатам його вершин: (-2;1), (2;-2) та (8;6).

4. В полярній системі координат дано точки $A\left(3;\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2;-\frac{\pi}{4}\right)$, $C(1;\pi)$, $D\left(5;-\frac{3\pi}{4}\right)$. Додатне положення полярної осі змінено на протилежне. Визначити полярні координати цих точок у новій системі.

5. Одна з вершин трикутника OAB знаходиться в полюсі O, дві інші $A\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$ і $B\left(4;\frac{\pi}{12}\right)$. Визначити площу цього трикутника.

6. Дано дві точки: $A(3;7)$ та $B(5;6)$. Знайти величину проекцій відрізку AB на осі координат.

Варіант № 6

1. Дано координати вершин трикутника ABC: $A(4;1)$, $B(7;5)$, $C(-4;7)$. Знайти довжину бісектриси AD кута A.

2. Обчислити площу трикутника, вершинами якого є точки $A(4;2)$, $B(9;4)$ та $C(7;6)$.

3. Визначити відстань від точки (2;0) до прямої, яка проходить через точки (1;1) і (5;4).

4. У полярній системі координат дано точки $M_1\left(3;\frac{\pi}{3}\right)$, $M_2\left(1;\frac{2\pi}{3}\right)$, $M_3(2;\ 0)$, $M_4\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$, $M_5\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right)$, $M_6\left(1;\frac{11\pi}{12}\right)$. Полярна вісь повернута так, що у новому положенні вона проходить через точку M_1. Визначити координати заданих точок у новій полярній системі.

5. Обчислити площу трикутника, вершини якого $A\left(3;\frac{\pi}{8}\right)$, $B\left(8;\frac{7\pi}{24}\right)$, $C\left(6;\frac{5\pi}{8}\right)$ задані в полярних координатах.

6. Площа трикутника $S=3$, дві його вершини є точками $A(3;1)$ і $B(1;-3)$, центр ваги цього трикутника лежить в на осі Ox. Визначте координати третьої вершини C.

Варіант № 7

1. Визначити довжину медіани AM трикутника ABC, заданого координатами своїх вершин: $A(5;-4)$, $B(-1;2)$, $C(5;1)$.

2. Показати, що чотирикутник, вершинами якого служать середини сторін даного чотирикутника, є паралелограм.

3. Визначити відстань від початку координат до прямої, яка проходить через точки (1;5) і (5;4).

4. В полярній системі координат дано точки $M_1\left(12;\frac{4\pi}{9}\right)$, $M_2\left(12;-\frac{2\pi}{9}\right)$. Обчислити полярні координати середини відрізка, який з'єднує точки M_1 і M_2.

5. Полюс полярної системи координат співпадає з початком прямокутної декартової системи координат, а полярна вісь співпадає з додатною піввіссю абсцис. В полярній системі координат дано точки $M_1\left(6;\frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(5;0)$, $M_3\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(10;-\frac{\pi}{3}\right)$, $M_5\left(8;\frac{2\pi}{3}\right)$. Визначити декартові координати цих точок.

6. Кінці однорідного стержня знаходяться в точках $A(5;-7)$ та $B(-1;9)$. Визначити координати центра ваги O цього стержня.

Варіант № 8

1. Довести, що трикутник ABC з координатами $A(1;1)$, $B(2;5)$, $C(-6;7)$ є прямокутним. Вказати вершину прямого кута.

2. Дано дві протилежні вершини квадрата $A(-1;4)$ і $C(7;-2)$. Знайти дві інші вершини.

3. Дві вершини трикутника знаходяться в точках (5;1) і (-2;2), третя вершина – на осі Ох. Знаючи, що площа трикутника дорівнює 10, знайти третю вершину.

4. В полярній системі координат дано точки $M_1(\rho_1;\theta_1)$ і $M_2(\rho_2;\theta_2)$. Обчислити відстань d між ними.

5. Полюс полярної системи координат співпадає з початком декартових прямокутних координат, а полярна вісь співпадає з додатною піввіссю абсцис. В декартовій прямокутній системі координат дано точки $M_1(0;5)$, $M_2(-3;0)$, $M_3\left(\sqrt{3};1\right)$, $M_4\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$, $M_5\left(1;-\sqrt{3}\right)$. Визначити полярні координати цих точок.

6. Полярні координати всіх точок кола, описаного навколо полюса радіусом, рівним а, задовольняють умову: $\rho = a$.

Якій умові повинні задовольняти прямокутні координати тих же точок?

Варіант № 9

1. Знайти координати центра і радіус кола, яке проходить через точку
B(-10;4) і дотикається до осі *Ox* в точці *A*(-6;0).

2. Визначати координати точок, що ділять відрізок *A*(2;3), *B*(-1;2) у відношенні $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$.

3. Площа трикутника *S*=3, дві його вершини *A*(3;1) і *B*(1;-3), центр ваги цього трикутника лежить на осі *Ox*. Визначити координати третьої вершини *C*.

4. В полярній системі координат дано точки $M_1\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$ і $M_2\left(8;-\frac{\pi}{12}\right)$. Обчислити відстань *d* між ними.

5. Нехай $(O,\vec{i},\vec{j})$ – дана прямокутна декартова система, а $(O,\vec{i})$ – полярна система, при цьому додатній напрямок обходу вибраний так, що $(\widehat{\vec{i},\vec{j}}) = +90°$. Визначити полярні координати наступних точок $M_1(0;6)$, $M_2(-2;0)$, $M_3(-1;1)$, $M_4\left(\sqrt{3};1\right)$, $M_6\left(1;-\sqrt{3}\right)$.

6. Побудувати точки, які задані полярними координатами: $A\left(3;\frac{\pi}{2}\right)$, $B(2;\pi)$, $C\left(3;-\frac{\pi}{4}\right)$.

Варіант № 10

1. Знайти координати центра і радіус кола, яке проходить через точку
A(-8;4) і дотикається осей координат.

2. Дві вершини трикутника *ABC* мають координати *A*(3;6), *B*(-3;5). Визначити координати третьої вершини при умові, що середини сторін *AC* і ВС лежать на різних осях координат.

3. Один з кінців відрізка *AB* знаходиться в точці *A*(2;3), його серединою є точка *M*(1;-2). Знайти другий кінець відрізку.

4. Дано правильний трикутник *ABC*, сторона якого дорівнює 5. Прийняв вершину *A* за полюс полярної системи координат, а направлену пряму *AB* за полярну вісь, визначити полярні координат вершин і центра трикутника. Розглянути два можливих випадки розташування трикутника відносно полярної осі.

5. Обчислити площу трикутника, одна з вершин якого знаходиться в полюсі, а дві інші мають полярні координати $A_1\left(4;\frac{\pi}{4}\right)$, $A_2\left(1;\frac{5\pi}{18}\right)$.

6. В полярній системі координат дано дві вершини $A\left(3;-\frac{4\pi}{9}\right)$ та $B\left(5;\frac{3\pi}{14}\right)$ паралелограма $ABCD$, точка перетину діагоналей якого співпадає з полюсом. Визначити дві інші вершини цього паралелограма.

Варіант № 11

1. На осях координат знайти точки, кожна з яких рівновіддалена від точок (1;1) і (3;7).

2. Дано дві суміжні вершини паралелограма $A(6;1)$, $B(-4;3)$ та точка перетину його діагоналей $M(2;-3)$. Знайдіть координати двох інших його вершин.

3. Дано дві точки $A(-4;2)$, $B(8;-7)$. Знайдіть точки C та D, які ділять відрізок AB на три рівні частини.

4. Обчислити відстань між двома точками $A\left(2;\frac{\pi}{12}\right)$ і $B\left(1;\frac{5\pi}{12}\right)$.

5. Трикутник ABC заданий полярними координатами вершин $A\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8;\frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(3;\frac{7\pi}{6}\right)$. Довести, що трикутник рівнобедрений.

6. Координати всіх точок прямої, паралельної осі ординат, задовольняють рівняння: $x=a$. Яке рівняння задовольняють полярні координати цих точок?

Варіант № 12

1. Доведіть, що трикутник, вершини якого знаходяться в точках $A(1;4)$, $B(8;8)$, $C(5;2)$, прямокутний.

2. Знаючи координати вершин $A(3;-1)$, $B(6;7)$, $C(-9;3)$ трикутника ABC, обчислити координати точки перетину його медіан.

3. Точка M – точка перетину медіан трикутника лежить на осі абсцис, дві вершини його – точки $A(2;-3)$ та $B(-5;1)$, третя вершина C лежить на осі ординат. Обчисліть координати точок M та C.

4. Дано квадрат $ABCD$, сторона якого дорівнює 3. Прийняв вершину A за полюс полярної системи координат, а направлену пряму AB за полярну вісь, визначити координати його вершин і точки P перетину діагоналей. Розглянути два можливих випадки розташування квадрата відносно полярної осі.

5. Обчислити площу трикутника, одна з вершин якого знаходиться в полюсі, а дві інші мають полярні координати $A_1\left(2;\dfrac{\pi}{3}\right)$, $A_2\left(3;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

6. Знаючи прямокутні координати точок (3;-4), (-1;1), (0;2), (5;0), знайдіть їх полярні координати.

Варіант № 13

1. Обчисліть площу квадрата, дві суміжні вершини якого знаходяться в точках $A(11;-2)$ та $B(-1;4)$.

2. Дано вершини $A(2;-3;-5)$, $B(-1;3;2)$ і точку $E(4;-1;7)$ перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайти дві інші вершини цього паралелограма.

3. Дано вершини трикутника $A(3;6)$, $B(-1;3)$, $C(2;-1)$. Обчислити довжину його висоти, яка проведена з вершини C.

4. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, сторона якого дорівнює а. Прийняв вершину A за полюс полярної системи координат, а направлену пряму AB за полярну вісь, визначити координати всіх його вершин і точки P перетину діагоналей. Розглянути два можливих випадки розташування шестикутника відносно полярної осі.

5. Обчислити площу трикутника, одна з вершин якого знаходиться в полюсі, а дві інші мають полярні координати $A_1\left(5;\dfrac{\pi}{3}\right)$, $A_2\left(3;\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

6. Знайдіть прямокутні координати точок, які дані своїми полярними координатами: $A\left(2;\dfrac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2};\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(5;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3;-\dfrac{\pi}{6}\right)$, причому вісь абсцис співпадає з полярною віссю, а початок координат з полюсом.

Варіант № 14

1. Дано три вершини паралелограма $A(-1;3)$, $B(2;-5)$, $C(0;4)$. Визначити четверту вершину D, протилежну B.

2. Знайдіть положення центра ваги O дротяного трикутника, довжини сторін якого 3, 4 та 5.

3. Дано три вершини паралелограма $A(-2;3)$, $B(4;-5)$, $C(-3;1)$. Обчислити його площу.

4. Знайти полярні координати точок, які симетричні з точками $M_1\left(2;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(3;\dfrac{\pi}{3}\right)$, $M_3\left(1;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(3;-\dfrac{\pi}{3}\right)$ відносно полюса.

5. Вершини трикутника знаходяться в точках $A\left(2\sqrt{3};\dfrac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{3};\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $C\left(4+\sqrt{3};\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Довести, що трикутник ABC прямокутний.

6. Обчисліть площу трикутника, який задано своїми вершинами (в полярних координатах): $A\left(9;\dfrac{\pi}{10}\right)$, $B\left(12;\dfrac{4\pi}{15}\right)$, $C\left(10;\dfrac{3\pi}{5}\right)$.

Варіант № 15

1. Дано дві суміжні вершини квадрата $A(-2;1)$, $B(3;3)$. Знайти дві інші вершини.

2. Дано три вершини $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$, $C(1;2;-3)$ паралелограма $ABCD$. Знайти його четверту, протилежну B, вершину D.

3. Дано три вершини паралелограма $A(3;7)$, $B(2;-3)$, $C(-1;4)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини В на сторону AC.

4. Знайти полярні координати точок, які симетричні з точками $M_1\left(2;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(3;\dfrac{\pi}{3}\right)$, $M_3\left(1;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(3;-\dfrac{\pi}{3}\right)$відносно полярної осі.

5. Дано полярні координати вершин трикутника $A\left(10;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $B\left(16;\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(6;\dfrac{7\pi}{6}\right)$. Довести, що трикутник ABC правильний.

6. Обчисліть площу трикутника, одна з вершин якого розміщується в полюсі, а дві інші мають полярні координати $\left(4;\dfrac{\pi}{4}\right)$ та $\left(1;\dfrac{5\pi}{18}\right)$.

Варіант № 16

1. Дано дві вершини рівностороннього трикутника $A(-3;2)$, $B(1;4)$. Знайти третю вершину C.

2. Дано точки $A(7;11)$ та $B(4;5)$. Обчисліть координати точки P, яка симетрична точці A відносно точки B та координати точки Q, яка симетрична точці В відносно точки A.

3. Дано послідовні вершини однорідної чотирикутної пластини $A(2;1)$, $B(5;3)$, $C(-1;7)$, $D(-7;5)$. Визначити координати її центра ваги.

4. Знайти відстань між точками $\left(5;\frac{\pi}{6}\right)$ і $\left(3;-\frac{\pi}{6}\right)$.

5. Обчислити площу трикутника, одна з вершин якого знаходиться в полюсі, а дві інші мають полярні координати $\left(4;\frac{\pi}{9}\right)$, $\left(1;\frac{5\pi}{18}\right)$.

6. На полярній осі знайдіть точку, які знаходиться на відстані 5 одиниць від точки А$\left(4\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$.

Варіант № 17

1. Центр O і вершина A правильного шестикутника $ABCDEF$ мають координати $O(-1;2)$, $A(1;4)$. Знайти координати інших вершин.

2. Дано вершини $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$ трикутника. Обчислити довжину його бісектриси, проведеної з вершини B. Система координат прямокутна.

3. Знайдіть координати вершини C правильного трикутника ABC, якщо дві інші його вершини знаходяться в точках $A(-3;2)$ та $B(1;6)$.

4. Знайти відстань між точками $\left(4;\frac{11\pi}{18}\right)$ і $\left(3;\frac{\pi}{9}\right)$.

5. Обчисліть площу квадрата, якщо дві протилежні його вершини знаходяться в точках $A\left(8;\frac{5\pi}{6}\right)$ та $C\left(3;\frac{7\pi}{6}\right)$.

6. Для полярної системи координат виведіть формулу для обчислення площі трикутника, одна з вершин якого співпадає з полюсом.

Варіант № 18

1. Трикутника ABC задано вершинами: $A(-\sqrt{3};1)$ $B(0;2)$ та $C(-2\sqrt{3};2)$. Обчисліть його зовнішній кут при вершині A.

2. Визначити координати кінців відрізка прямої, який точками $C(2;0;2)$ і $D(5;-2;0)$ ділиться на три рівні частини.

3. Площа трикутника $S=3$, дві його вершини точки $A(3;1)$, $B(1;-3)$, а третя вершина C лежить на осі Oy. Обчислити координати вершини C.

4. Знайти відстань між точками $\left(4;\frac{\pi}{5}\right)$ і $\left(6;\frac{6\pi}{5}\right)$.

5. В полярній системі координат дано дві суміжні вершини квадрату $M_1\left(12;-\frac{\pi}{10}\right)$ і $M_2\left(3;\frac{\pi}{15}\right)$. Визначити його площу.

6. Дано вершини трикутника (в полярних координатах): $A\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8;\frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(3;\frac{7\pi}{6}\right)$. Перевірте чи є трикутник правильним.

Варіант № 19

1. Знайти відстань від початку координат до точок $A(11;4)$, $B(-3;4)$.

2. Середини сторін трикутника ABC знаходяться в точках $P(5;3)$, $Q(-1;5)$ та $R(1;6)$. Знайдіть координати його вершин.

3. Площа трикутника $S=4$, дві його вершини точки $A(2;1)$, $B(3;-2)$, а третя вершина C лежить на осі Ox. Обчислити координати вершини C.

4. Дано полярні координати точок $A\left(8;-\frac{2\pi}{3}\right)$ і $B\left(6;\frac{\pi}{3}\right)$. Обчислити полярні координати середини відрізка, який з'єднує точки A і B.

5. Обчислити площу трикутника, одна з вершин якого знаходиться в полюсі, а дві інші мають полярні координати $A_1\left(4;\frac{\pi}{9}\right)$, $A_2\left(1;\frac{5\pi}{18}\right)$.

6. Обчисліть відстань між двома даними точками: $A\left(2;\frac{\pi}{12}\right)$ та $B\left(1;\frac{5\pi}{12}\right)$; $C\left(4;\frac{\pi}{5}\right)$ та $D\left(6;\frac{6\pi}{5}\right)$; $E\left(3;\frac{11\pi}{18}\right)$ та $F\left(4;\frac{\pi}{9}\right)$.

Варіант № 20

1. Обчисліть довжини сторін трикутника, вершини якого знаходяться в точках $A(1;2)$, B $(-3;4)$, $C(2;-1)$.

2. Дано вершини $A(2;-1;4)$, $B(3;2;-6)$, $C(-5;0;2)$ трикутника. Обчислити довжину медіани, проведеної з вершини A.

3. Площа трикутника $S=3$, дві його вершини точки $A(3;1)$, $B(1;-3)$. Центр ваги цього трикутника лежить на осі Ox. Обчислити координати вершини C.

4. Відносно полярної системи координат дана точка $A\left(5;\frac{2\pi}{3}\right)$. Знайти точку B, яка симетрична точці A відносно полюса.

5. Одна з вершин трикутника *OAB* знаходиться в полюсі, дві інші $A(\rho_1;\theta_1)$ і $B(\rho_2;\theta_2)$. Визначити площу цього трикутника.

6. Дано трикутник *ABC*: *A*(2;-3), *B*(1;3) та *C*(-6;-4). Знайдіть точку *M*, симетричну вершині *A* відносно сторони *BC*.

Варіант № 21

1. На осі *Oy* знайти точку, рівновіддалену від точки (-8;-4) і від початку координат.

2. Знаючи координати середин A_1, B_1, C_1 сторін трикутника, знайти координати його вершин, якщо: $A_1(1;4)$, $B_1(-1;0)$, $C_1(3;2)$.

3. Площа паралелограма *S*=12; дві його вершини точки *A*(-1;3) і *B*(-2;4). Знайти дві інші вершини цього паралелограму, при умові, що точка перетину його діагоналей лежить на осі абсцис.

4. Відносно полярної системи координат дана точка $A\left(5;\frac{2\pi}{3}\right)$. Знайти точку *C*, яка симетрична точці *A* відносно полярної осі.

5. В полярній системі координат дано дві протилежні вершини квадрату $P\left(6;-\frac{7\pi}{12}\right)$, $Q\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$. Визначити його площу.

6. Знайдіть центр та радіус кола, описаного навколо трикутника *ABC*: *A*(2;2), *B*(-5;1), *C*(3;-5).

Варіант № 22

1. Встановити, чи буде трикутник *ABC*: *A*(3;1), *B*(7;5), *C*(5;-1), гострокутним, прямокутним або тупокутним.

2. Обчисліть площу квадрата, якщо дві протилежні його вершини знаходяться в точках *A*(4;-2) та *C*(-1;3).

3. Площа паралелограма *S*=17; дві його вершини точки *A*(2;1) і *B*(5;-3). Знайти дві інші вершини цього паралелограму, при умові, що точка перетину його діагоналей лежить на осі ординат.

4. Обчислити відстань між двома точками $E\left(3;\frac{11\pi}{18}\right)$ і $F\left(4;\frac{\pi}{9}\right)$.

5. Дано полярні координати вершин трикутника $A\left(10;\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(16;\frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(6;\frac{7\pi}{6}\right)$. Довести, що трикутник *ABC* правильний.

6. Знаючи дві протилежні вершини ромба *A*(8;-3) та *C*(10;11), знайдіть дві інші його вершини за умови, що довжина сторони ромба рівна 10.

Варіант № 23

1. На осях координат знайти точки, які віддалені від точки $M(-5;9)$ на відстані 15.

2. Дано дві суміжні вершини $A(-1;3)$ та $B(2;1)$ паралелограма $ABCD$. Знайдіть дві інші його вершини при умові, що діагональ AC паралельна осі Ox, а діагональ BD паралельна осі Oy.

3. Обчислити площу чотирикутника, вершини якого точки $A(1;3)$, $B(-2;0)$, $C(4;3)$, $D(-3;5)$.

4. Обчислити відстань між двома точками $C\left(4;\frac{\pi}{5}\right)$ і $D\left(6;\frac{6\pi}{5}\right)$.

5. Знаючи прямокутні координати точок $A(-1;1)$, $B(0;2)$, $C(5;0)$, знайти їх полярні координати.

6. Знайдіть полярні координати точок, симетричних точкам $\left(1;\frac{\pi}{4}\right)$; $\left(3;\frac{2\pi}{3}\right)$; $\left(\frac{2}{3};-\frac{\pi}{6}\right)$; $M(\rho;\varphi)$: 1) відносно полюса; 2) відносно полярної осі.

Варіант № 24

1. Дано коло з центром в точці $C(6;7)$ і радіусом $r=5$. Із точки $A(7;14)$ до цього кола проведені дотичні. Знайти їх довжини.

2. Знаючи координати середин A_1, B_1, C_1 сторін трикутника, знайти координати його вершин, якщо: $A_1(-3;4)$, $B_1(2;3)$, $C_1(-2;0)$.

3. Дві вершини трикутника ABC знаходяться в точках $A(1;2)$ і $B(5;-1)$, а третя вершина C на осі Ox. Знайти координати вершини C, якщо площа трикутника $S=2$.

4. В полярній системі координат дано точки $A\left(8;-\frac{2\pi}{3}\right)$ і $B\left(6;\frac{\pi}{3}\right)$. Визначити полярні координати середини відрізка, який з'єднує точки A і B.

5. Знайти полярні координати точки M, знаючи її декартові координати $x=8$, $y=-6$.

6. Знайдіть центр кола, що проходить через точку $A(-4;2)$ та дотикається осі Ox в точці $B(5;2)$.

Варіант № 25

1. Із точки $C(-4;\ -6)$, як із центра радіусом $r=10$ описане коло. Знайти точки його перетину з бісектрисами координатних кутів.

2. Знайдіть центр кола, яке проходить через три задані точки: $A(0;1)$, $B(2;3)$ та $C(-1;4)$.

3. Знайти відстань від точки $A(6;-8)$ до прямої, яка проходить через точки B(-5;0) і C(3;6).

4. Відносно полярної системи координат дано точки $A\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(3;\frac{4\pi}{3}\right)$, $C\left(1;\frac{3\pi}{2}\right)$, $D(5;\pi)$, $E(5;\ 0)$. Які координати будуть мати ці точки, якщо повернути полярну вісь навколо полюса в додатному напрямку на кут $\frac{3\pi}{4}$?

5. Знайти прямокутні координати точок, які задані своїми полярними координатами $A\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3;-\frac{\pi}{6}\right)$, при чому вісь абсцис співпадає з полярною віссю, а початок координат з полюсом.

6. Побудуйте точки, які мають наступні полярні координати: $\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$; $\left(1;\frac{5\pi}{3}\right)$; $\left(5;\frac{7\pi}{6}\right)$; $\left(0{,}5;\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(2{,}5;\frac{2\pi}{3}\right)$; $(6;\pi)$; $\left(3;\frac{\pi}{3}\right)$; $\left(\sqrt{3};-\frac{\pi}{6}\right)$; $\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$.

Варіант № 26

1. Визначити, чи є серед внутрішніх кутів трикутника з вершинами $A(3;2)$, $B(-1;-1)$ та $C(11;-6)$ тупий кут.

2. Відрізок AB точками $C(1;2)$ та $D(3;4)$ поділено на три рівні частини. Знайти точки A та B.

3. Дві вершини трикутника знаходяться в точках $A(5;1)$ та $B(-2;2)$, третя вершина – на осі OX. Знаючи, що площа трикутника дорівнює 10, знайти третю вершину.

4. В полярній системі координат дано дві протилежні вершини квадрату $A\left(6;-\frac{7\pi}{12}\right)$ та $B\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$. Визначити його площу.

5. Трикутник ABC заданий полярними координатами вершин $A\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8;\frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(3;\frac{7\pi}{6}\right)$. Довести, що цей трикутник правильний.

6. Знайти точку перетину діагоналей AC і BD чотирикутника: $A(3;-2)$, $B(3;5)$, $C(0;4)$, $D(-1;-1)$.

Варіант № 27

1. Знайти координати вершин рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює 4, якщо вісь OX проходить через одну із сторін трикутника, а вісь OY проходить через середину цієї сторони.

2. Відрізок, який з'єднує точки $A(-5;8)$ та $B(10;2)$ точками C і D ділиться на три рівні частини. Знайти точки C та D.

3. Площа трикутника $S=3$, дві його вершини точки $A(3;1)$ та $B(1;-3)$, центр ваги цього трикутника лежить на осі OX. Визначити координати третьої вершини C.

4. На полярній осі знайти точку, яка знаходиться від точки $A\left(4\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$ на відстані, яка дорівнює 5.

5. В полярній системі координат дано точки $A\left(9;\frac{\pi}{10}\right)$, $B\left(12;\frac{4\pi}{15}\right)$ та $C\left(10;\frac{3\pi}{5}\right)$. Обчислити площу трикутника ABC.

6. Перевірити чи належать три точки $A(3;1)$, $B(-2;-9)$ та $C(8;11)$ одній прямій.

Варіант № 28

1. Обчислити периметр і площу трикутника за координатами його вершин: $A(-2;1)$, $B(2;-2)$, $C(8;6)$.

2. Знайти точку, в якій пряма, яка з'єднує точки $A(4;1)$ та $B(-2;4)$, перетинає вісь OX.

3. На координатній площині YOZ знайти точку, рівновіддалену від трьох даних точок: $A(3;1;2)$, $B(4;-2;-2)$ та $C(0;5;1)$.

4. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін: $P(3;-2)$, $Q(1;6)$ і $R(-4;2)$.

5. Знайти точку перетину діагоналей AC і BD чотирикутника: $A(3;-2)$, $B(3;5)$, $C(0;4)$, $D(-1;-1)$.

6. Обчислити площу трикутника, одна з вершин якого знаходиться в полюсі, а дві інші мають полярні координати $\left(4;\frac{\pi}{9}\right)$ та $\left(1;\frac{5\pi}{18}\right)$.

Варіант № 29

1. На прямій, яка з'єднує точки $(-3;5)$ і $(-1;2)$ знайти точку, яка має абсцису $x=5$.

2. Дано трикутник ABC: $A(4;1)$, $B(7;5)$ і $C(-4;7)$. Знайти точку перетину бісектриси кута A з протилежною стороною BC.

3. Знайти центр кола, яке проходить через точку $A(-4;2)$ і дотикається осі абсцис в точці $B(2;0)$.

4. Дано дві вершини паралелограма $A(-4;4)$, $B(2;8)$ і точка перетину його діагоналей $M(2;2)$. Знайти дві інші його вершини.

5. Перевіривши, що точки $A(-2;8)$, $B(1;5)$ і $C(4;1)$ можуть служити вершинами ромба, обчислити площу цього ромба.

6. Трикутник ABC задано полярними координатами вершин: $A\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8;\frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(3;\frac{7\pi}{6}\right)$. Довести, що заданий трикутник рівнобедрений.

Варіант № 30

1. Довести, що трикутник з вершинами $A(0;0)$, $B(3;1)$ та $C(1;7)$ прямокутний.

2. Знайти точку перетину медіан трикутника, знаючи координати його вершин: $A(1;4)$, $B(-5;0)$ та $C(-2;-1)$.

3. Дано три вершини паралелограма: $A(4;2)$, $B(5;7)$, та $C(-3;4)$. Знайти четверту вершину D, протилежну вершині B.

4. Знайти центр і радіус кола, яке проходить через точку $A(2;-1)$ і дотикається обох осей координат.

5. Обчислити площу п'ятикутника, вершинами якого є точки: $A(-2;0)$, $B(0;-1)$, $C(2;0)$, $D(3;2)$ та $K(-1;3)$.

6. Дано вершини трикутника в полярній системі координат: $A\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8;\frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(3;\frac{7\pi}{6}\right)$. Довести, що цей трикутник правильний.

Графічно-розрахункова робота

Задано координати вершин піраміди $ABCD$ в прямокутній декартовій системі координат. Знайти:

1) координати векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ і обчислити довжини цих векторів;

2) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ в радіанах;

3) проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;

4) площу грані ABC;

5) об\`єм піраміди $ABCD$ та її висоту DH;

6) кут нахилу бічного ребра AD до площини основи (ABC);

7) кут нахилу бічної грані (ADC) до площини основи (ABC).

Всі обчислення виконати з точністю до двох десяткових знаків. Значення параметру β брати рівним останній цифрі номеру залікової книжки.

1. $A(-4;6;1)$, $B(\beta;4-\beta;1+\beta)$, $C(2;2;-3)$, $D(0;4;3)$.

2. $A(1;7;-3)$, $B(4-\beta;2\beta;4+\beta)$, $C(-3;-1;0)$, $D(-1;2;-1)$.

3. $A(8;-1;3)$, $B(3+\beta;1+\beta;3\beta)$, $C(-4;0;5)$, $D(0;2;3)$.

4. $A(-5;7;2)$, $B(-2-\beta;1+\beta;0)$, $C(1;-3;0)$, $D(-2;1;3)$.

5. $A(2;6;-1)$, $B(3+\beta;2+\beta;-3\beta)$, $C(-4;0;0)$, $D(1;0;2)$.

6. $A(0;-1;-4)$, $B(6-\beta;-3-\beta;2-\beta)$, $C(0;2;-1)$, $D(2;0;3)$.

7. $A(2;-2;-4)$, $B(0;1-\beta;4+\beta)$, $C(3;-3;1)$, $D(-5;4;7)$.

8. $A(9;3;-6)$, $B(0;3+\beta;-5-\beta)$, $C(-4;5;1)$, $D(7;-3;8)$.

9. $A(-7;4;1)$, $B(-2-\beta;\beta;3+\beta)$, $C(0;-2;1)$, $D(5;-1;-1)$.

10. $A(-2;2;1)$, $B(4+\beta;0;3-\beta)$, $C(-3;6;1)$, $D(6;-3;7)$.

11. $A(5;-1;7)$, $B(-3-\beta;-2+\beta;0)$, $C(-3;0;-5)$, $D(6;2;3)$.

12. $A(-4;4;-1)$, $B(0;4-\beta;1+\beta)$, $C(-1;5;3)$, $D(-1;-2;1)$.

13. $A(5;-2;7)$, $B(-4+\beta;2-\beta;0)$, $C(-1;5;5)$, $D(2;-1;8)$.

14. $A(8;-6;1)$, $B(0;-5-\beta;-1+\beta)$, $C(-4;3;1)$, $D(-5;7;-2)$.

15. $A(4;-3;1)$, $B(-4-\beta;6+\beta;0)$, $C(-2;2;1)$, $D(9;-1;-2)$.

16. $A(-5;1;-3)$, $B(-4+\beta;0;3-\beta)$, $C(-1;2;2)$, $D(1;-1;1)$.

17. $A(2;-4;2)$, $B(-1-\beta;4-\beta;-5+\beta)$, $C(-1;-5;1)$, $D(5;1;6)$.

18. $A(-1;5;5)$, $B(-6+\beta;1-\beta;0)$, $C(0;-1;3)$, $D(-4;6;0)$.

19. $A(-5;2;-3)$, $B(-3+\beta;0;2+\beta)$, $C(-1;-1;2)$, $D(3;-2;3)$.

20. $A(4;-7;1)$, $B(6+\beta;5-\beta;-\beta)$, $C(-1;2;-3)$, $D(5;-6;8)$.

21. $A(-1;6;2)$, $B(-5\beta;4-\beta;1+\beta)$, $C(-1;0;1)$, $D(2;-1;6)$.

22. $A(7;7;5)$, $B(-3+\beta;-5+\beta;0)$, $C(-1;3;2)$, $D(4;6;-3)$.

23. $A(3;-5;1)$, $B(-4-\beta;-3-\beta;2\beta)$, $C(-4;0;5)$, $D(-7;1;4)$.

24. $A(7;5;1)$, $B(-4\beta;0;-1-\beta)$, $C(0;2;1)$, $D(1;7;-1)$.

25. $A(0;-1;-7)$, $B(-3-\beta;-6+\beta;0)$, $C(-1;0;1)$, $D(0;5;7)$.

26. $A(3;7;-2)$, $B(-4-\beta;-3\beta;2+\beta)$, $C(-2;2;3)$, $D(4;-3;4)$.

27. $A(9;0;-8)$, $B(-5-\beta;-3\beta;-1-\beta)$, $C(0;-3;-2)$, $D(3;-4;8)$.

28. $A(6;-4;1)$, $B(\beta;-4+\beta;-3\beta)$, $C(-3;-1;2)$, $D(3;-2;-1)$.

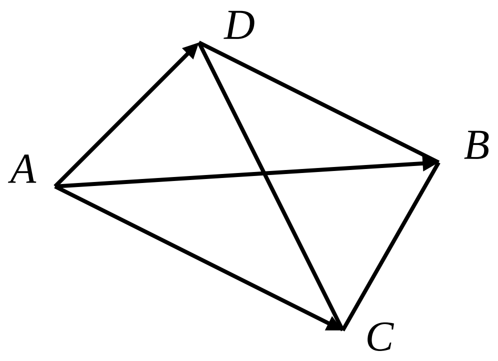
29. $A(4;9;-2)$, $B(-6\beta;4-\beta;1+\beta)$, $C(-3;4;2)$, $D(0;7;7)$.

30. $A(5;-1;3)$, $B(4\beta;4+\beta;-3-\beta)$, $C(2;2;0)$, $D(5;10;4)$.

Методичні вказівки до розв'язання

Дано координати вершин піраміди $A(1;-1;2)$, $B(1-\beta;3+\beta;2-\beta)$, $C(1;3;-3)$, $D(1;-5;1)$. Візьмемо $\beta=3$, тоді координати вершин піраміди $ABCD$ будуть такі: $A(1;-1;2)$, $B(-2;6;-1)$, $C(1;3;-3)$, $D(1;-5;1)$.

Побудуємо схематичний малюнок піраміди, не прив'язуючись до системи координат $Oxyz$.



1. Довільний вектор $\vec{a}$ можна записати в системі орт $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ за слідуючою формулою: $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$ (1)

a_x,a_y,a_z - проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі Ox, Oy та Oz; $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ - одиничні вектори, які направлені так, як направлені осі Ox, Oy та Oz. Якщо задані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ та $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то проекції вектора $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ на координатні осі знаходяться за формулами:

$$a_x=x_2-x_1;a_y=y_2-y_1;a_z=z_2-z_1 \quad (2)$$

Тоді: $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\cdot\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\cdot\vec{k}$ (3)

Підставляючи в (3) координати точок A та B, одержимо вектор $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=(-2-1)\vec{i}+(6+1)\vec{j}+(-1-2)\vec{k}=-3\vec{i}+7\vec{j}-3\vec{k}$.

Аналогічно, підставляючи в (3) координати точок A та C, знаходимо вектор $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AC}=(1-1)\vec{i}+(3+1)\vec{j}+(-3-2)\vec{k}=4\vec{j}-5\vec{k}$.

Підставляючи в (3) координати точок A та D, одержимо вектор $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD}=(1-1)\vec{i}+(-5+1)\vec{j}+(1-2)\vec{k}=-4\vec{j}-1\vec{k}$.

Отже знайдені вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ мають такі координати:

$\overrightarrow{AB}\{-3;7;-3\}$, $\overrightarrow{AC}\{0;4;-5\}$, $\overrightarrow{AD}\{0;-4;-1\}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ задано формулою (1), або (3), то його модуль (довжина) обчислюється за формулою:

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a^2{}_x+a^2{}_y+a^2{}_z}$

Застосовуючи цю формулу, обчислюємо модулі знайдених векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{9+49+9}\approx 8{,}19$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{16+25}\approx 6{,}40 \quad ,$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{16+1}\approx 4{,}12.$$

2. Так як скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ дорівнює добутку їх довжин, помноженому на косинус кута мім ними, тобто: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi,$ то косинус кута φ між двома векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх модулів: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$. (4)

Якщо координати векторів-співмножників відомі $\vec{a}(a_x,a_y,a_z), \vec{b}(b_x,b_y,b_z)$, то їх скалярний добуток можна знайти за формулою: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$ (5)

Знаходимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ за формулою (5):

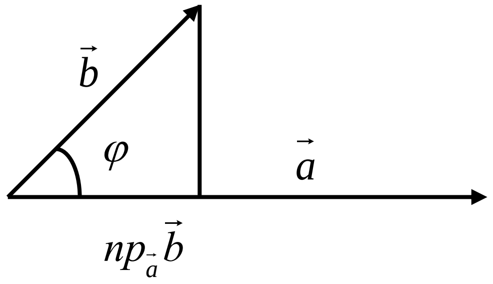
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-3)\cdot 0+7\cdot 4+(-3)\cdot(-5)=28+15=43$

Отже за формулою (4) дістанемо:

$$\cos\varphi=\cos\angle A=\frac{43}{8{,}19\cdot 6{,}40}\approx 0{,}82.$$

3. Проекція вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ знаходиться за формулою:

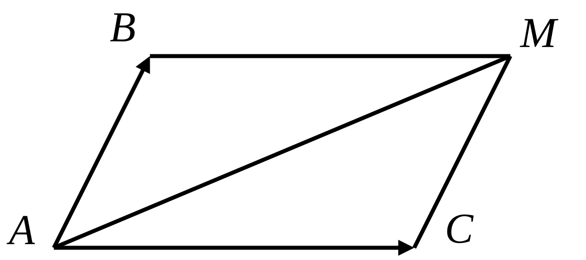
$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}, \text{ звідки } np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|},$$



Отже проекція вектора $\overrightarrow{AD}$ на $\overrightarrow{AB}$ дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на модуль вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$np_{\overline{AB}}\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{-3\cdot 0 + 7\cdot(-4) + (-3)\cdot(-1)}{8{,}19} \approx 3{,}05 \text{(лін. од.)}$$

4. Площа грані ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Позначимо векторний добуток вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{AM}$: $\overrightarrow{AM} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.



Тоді, виходячи з геометричного змісту модуля векторного добутку двох векторів, величина модуля вектора $\overrightarrow{AM}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, а площа грані ABC буде чисельно дорівнювати половині модуля вектора $\overrightarrow{AM}$: $S_{ABFS} = \left|\overrightarrow{AM}\right|, S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AM}\right|$.

Знайдемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AM}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 7 & -3\\ 0 & 4 & -5\end{vmatrix}=$$

$$=(-35+12)\vec{i}+15\vec{j}-12\vec{k}=-21\vec{i}+15\vec{j}-12\vec{k}.$$

Таким чином, $\overrightarrow{AM}\{-21;15;-12\}$, а його модуль дорівнює:

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{(-21)^2+15^2+(-12)^2}=\sqrt{441+225+144}\approx 29{,}85.$$

Отже $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 29{,}82\approx 14{,}92$ (кв. од.)

5. Об`єм паралелепіпеда, побудованого на трьох некомпланарних векторах чисельно дорівнює абсолютній величині їх мішаного добутку: $V=\left|\left(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right)\right|$.

А об`єм піраміди дорівнює шостій частині від об`єму паралелепіпеда: $V=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right)\right|$.

Обчислимо мішаний добуток:

$$\left(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-3 & 7 & -3\\ 0 & 4 & -5\\ 0 & -4 & -1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}(-3)\begin{vmatrix}4 & -5\\ -4 & -1\end{vmatrix}=-3(-4-20)=72$$

Отже V паралелепіпеда дорівнює $V=72$ куб. од., а об'єм піраміди $ABCD$ $V=\dfrac{1}{6}\cdot 72=12$ (куб. од.).

Тепер можна знайти висоту DK піраміди $ABCD$:

$V_{пір}=\dfrac{1}{3}S_{осн}\cdot H$, звідки $H=\dfrac{3V}{S_{осн}}$, тому $DK=\dfrac{3\cdot 12}{14{,}92}\approx 2{,}41$ (лін. од.).

Отже висота DK заданої піраміди дорівнює $2{,}41$ лін. одиниць.

6. Знайдемо кут α нахилу бічного ребра AD до площини основи ABC.

З трикутника ABK: $\alpha=90^0-\varphi$, тому $\sin\alpha=\sin(90^0-\varphi)=\cos\varphi$

Кут φ - це кут між векторами $\overrightarrow{AD}$ і вектором $\vec{n}$, перпендикулярним до площини основи: $\overrightarrow{AC}\{0;4;-5\}$, $\overrightarrow{AB}\{-3;7;-3\}$.

$$\vec{n}=\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 4 & -5\\ -3 & 7 & -3\end{vmatrix}=23\vec{i}+15\vec{j}+12\vec{k}.$$

$\vec{n}\{23;15;12\}$.

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD}\{0;-4;-1\}$.

Тоді

$$\sin\alpha=\cos\varphi=\frac{|32\cdot 0+15\cdot(-4)+12\cdot 9-1)|}{\sqrt{23^2+15^2+12^2}\cdot\sqrt{0^2+(-4)^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{72}{\sqrt{898}\cdot\sqrt{17}}\approx 0,58.$$

7. Кут α нахилу площини бічної грані (ADC) до площини основи (ABC) буде дорівнювати куту між векторами $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$, що відповідно перпендикулярні до цих площин.

Для знаходження вектора $\overrightarrow{n_1}$, в площині (ADC) знайдемо координати двох векторів, що лежать в цій площині:

$\overrightarrow{AD}\{0;-4;-1\}$, $\overrightarrow{AC}\{0;4;-5\}$.

Тоді $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -4 & -1\\ 0 & 4 & -5\end{vmatrix}=8\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}.$ Тобто $\overrightarrow{n_1}\{8;0;0\}$.

Аналогічно, $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 4 & -5\\ -3 & 7 & -3\end{vmatrix}=23\vec{i}+15\vec{j}+12\vec{k}.$

Значить, $\overrightarrow{n_2}\{23;15;12\}$.

Тоді за формулою $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, маємо:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{8\cdot 23+0\cdot 15+0\cdot 12}{\sqrt{23^2+15^2+12^2}\cdot\sqrt{8^2+0^2+0^2}}=\frac{184}{\sqrt{898}\cdot 8}=$$

$$=\frac{23}{\sqrt{898}}\approx 0,76.$$

Тестові теоретичні питання

1. Що називається проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$?

A. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$ називається число $np_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}$, яке дорівнює довжині відрізка A_lB_l між проекціями відповідно початку A і кінця B вектора на вісь $\vec{l}$.

B. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$ називається число $np_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}$, яке дорівнює довжині відрізка A_lB_l між проекціями відповідно початку A і кінця B вектора на вісь $\vec{l}$, причому довжина береться зі знаком "+", якщо вектор $\overrightarrow{A_lB_l}$ співнапрямлений з віссю $\vec{l}$ $\overrightarrow{A_lB_l} \uparrow\uparrow \vec{l}$, або довжина береться зі знаком "–", якщо вектор $\overrightarrow{A_lB_l}$ напрямлений протилежно осі $\vec{l}$ $\overrightarrow{A_lB_l} \uparrow\downarrow \vec{l}$.

C. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$ називається число $np_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}$, яке дорівнює сумі довжин відрізків AA_l і BB_l, де A_l і B_l – проекції відповідно початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$.

D. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$ називається вектор $np_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}$, який дорівнює сумі векторів $\overrightarrow{AA_l}$ і $\overrightarrow{BB_l}$, де A_l і B_l – проекції відповідно початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$.

2. Чому дорівнює проекція суми $np_{\vec{l}}(\vec{a}+\vec{b})$?

A. $np_{\vec{l}}(\vec{a}+\vec{b}) = np_{\vec{l}}\vec{a} + np_{\vec{l}}\vec{b} - 2np_{\vec{l}}\vec{a}\cdot np_{\vec{l}}\vec{b}$.

B. $np_{\vec{l}}(\vec{a}+\vec{b}) = np_{\vec{l}}\vec{a}\cdot np_{\vec{l}}\vec{b}$.

C. $np_{\vec{l}}(\vec{a}+\vec{b}) = np_{\vec{l}}\vec{a} + np_{\vec{l}}\vec{b}$.

D. $np_{\vec{l}}(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{b}\cdot np_{\vec{l}}\vec{a} + \vec{a}\cdot np_{\vec{l}}\vec{b}$.

3. Проекція $np_{\vec{a}}\vec{b}$ вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ дорівнює

A. $np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{a}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

B. $np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

C. $np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

D. $np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

4. Напрямні косинуси $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\vec{a}$ зв’язані співвідношенням

A. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

B. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = |\vec{a}|^2$.

C. $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma = 1$.

D. $|\cos\alpha|+|\cos\beta|+|\cos\gamma|=1$.

5. В якому випадку $np_{\vec{l}}\vec{a}=0$?

A. Вектор $\vec{a}$ паралельний до осі $\vec{l}$.

B. Вектор $\vec{a}$ утворює з віссю $\vec{l}$ кут 30°.

C. Вектор $\vec{a}$ утворює з віссю $\vec{l}$ кут 45°.

D. Вектор $\vec{a}$ перпендикулярний до осі $\vec{l}$.

6. Чому дорівнюють координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо відомі координати його початку $A(x_A, y_A, z_A)$ і кінця $B(x_B, y_B, z_B)$?

A. $\overrightarrow{AB}=(x_A+x_B; y_A+y_B; z_A+z_B)$.

B. $\overrightarrow{AB}=(x_A-x_B; y_A-y_B; z_A-z_B)$.

C. $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A; y_B-y_A; z_B-z_A)$.

D. $\overrightarrow{AB}=(x_A\cdot x_B; y_A\cdot y_B; z_A\cdot z_B)$.

7. Як обчислюється модуль (довжина) вектора $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$?

A. $|\vec{a}|=|a_x|+|a_y|+|a_z|$.

B. $|\vec{a}|=-\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2-a_z{}^2}$.

C. $|\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2-a_y{}^2+a_z{}^2}$.

D. $|\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}$.

8. Що називається добутком $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на скаляр α?

A. Добутком вектора $\vec{a}$ на число α називається вектор $\alpha\vec{a}$, який має такі властивості: 1) $|\alpha\vec{a}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$; 2) якщо $\alpha=0$, то $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$; якщо $\alpha>0$, то $\alpha\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$; якщо $\alpha<0$, то $\alpha\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

B. Добутком вектора $\vec{a}$ на число α називається вектор $\alpha\vec{a}$, який має такі властивості: 1) $|\alpha\vec{a}|=\alpha\cdot|\vec{a}|$; 2) якщо $\alpha=0$, то $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$; якщо $\alpha>0$, то $\alpha\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$; якщо $\alpha<0$, то $\alpha\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

C. Добутком вектора $\vec{a}$ на число α називається вектор $\alpha\vec{a}$, який має такі властивості: 1) $|\alpha\vec{a}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$; 2) якщо $\alpha=0$, то $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$; якщо $\alpha\neq0$, то $\alpha\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$.

D. Добутком вектора $\vec{a}$ на число α називається вектор $\alpha\vec{a}$, який має такі властивості: 1) $|\alpha\vec{a}|=\alpha\cdot|\vec{a}|$; 2) якщо $\alpha=0$, то $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$; якщо $\alpha\neq0$, то $\alpha\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

9. Довжина якого з векторів дорівнює $|\vec{a}|=5$?

A. $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$.

B. $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-2\sqrt{3}\vec{k}$.

C. $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\sqrt{3}\vec{k}$.

D. $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

10. Що називається скалярним добутком $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

A. Скалярним добутком векторів $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

B. Скалярним добутком векторів $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

C. Скалярним добутком векторів $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$.

D. Скалярним добутком векторів $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\vec{b}\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

11. Чому дорівнює скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторів $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$?

A. $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x - a_yb_y - a_zb_z$.

B. $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x - a_yb_y + a_zb_z$.

C. $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_y + a_yb_z + a_zb_x$.

D. $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$.

12. Чому дорівнює косинус кута $\varphi = \vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}$ між двома векторами $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$?

A. $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

B. $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} - \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

C. $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \dfrac{a_xb_x - a_yb_y - a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

D. $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

13. Для того, щоб ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були ортогональними (перпендикулярними) $\vec{a}\perp\vec{b}$, необхідно і достатньо, щоб

A. $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$. B. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. C. $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$. D. $\vec{a}\cdot\vec{b} \neq 0$.

14. Для того, щоб ненульові вектори $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ були колінеарними (паралельними) $\vec{a}\parallel\vec{b}$, необхідно і достатньо, щоб

A. $a_xb_y+a_yb_z+a_zb_x=0$.

B. $a_xb_x-a_yb_y+a_zb_z\neq 0$.

C. $\dfrac{a_x}{b_x}\neq\dfrac{a_y}{b_y}\neq\dfrac{a_z}{b_z}$.

D. $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

15. Що називається векторним добутком $\vec{a}\times\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$?

A. Векторним добутком $\vec{a}\times\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам: 1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$; 2) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\parallel\vec{b}$; 3) якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ відкласти від однієї точки, то з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ видно здійснюваним проти ходу годинникової стрілки.

B. Векторним добутком $\vec{a}\times\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам: 1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$; 2) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$; 3) якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ відкласти від однієї точки, то з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ видно здійснюваним проти ходу годинникової стрілки.

C. Векторним добутком $\vec{a}\times\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам: 1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$; 2) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$; 3) якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ відкласти від однієї точки, то з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ видно здійснюваним проти ходу годинникової стрілки.

D. Векторним добутком $\vec{a}\times\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам: 1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$; 2) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$; 3) якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ відкласти від однієї точки, то з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ видно здійснюваним за ходом годинникової стрілки.

16. Векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює нулю, якщо

A. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні $(\vec{a}\perp\vec{b})$.

B. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

C. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють між собою кут $\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}=\pi/4$.

D. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють між собою кут $\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}=\pi/6$.

17. Чому дорівнює векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ векторів $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$?

A. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$.

B. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$.

C. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & -a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$.

D. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & b_x & a_x\\ \vec{j} & b_y & a_y\\ \vec{k} & b_z & a_z\end{vmatrix}$.

18. Модуль (довжина) векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює

A. $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

B. $|\vec{a}\times\vec{b}|=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

C. $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

D. $|\vec{a}\times\vec{b}|=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

19. Як розташований векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ по відношенню до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

A. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\perp\vec{a}$; $\vec{c}\parallel\vec{b}$.

B. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\parallel\vec{a}$; $\vec{c}\parallel\vec{b}$.

C. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\parallel\vec{a}$; $\vec{c}\perp\vec{b}$.

D. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\perp\vec{a}$; $\vec{c}\perp\vec{b}$.

20. Чому дорівнює мішаний добуток $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ трьох векторів $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ і $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$?

A. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

B. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

C. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

D. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

21. В якому випадку мішаний добуток трьох векторів $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ дорівнює нулю?
   A. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ взаємно перпендикулярні.
   B. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні.
   C. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні (розташовані в одній площині або в паралельних площинах).
   D. Вектор $\vec{a}+\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{c}$.
22. Які три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис у тривимірному просторі?
   A. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо вони лінійно залежні.
   B. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо їх мішаний добуток $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.
   C. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо $\vec{a}\parallel\vec{b}\parallel\vec{c}$.
   D. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо вони лінійно незалежні.
23. Два вектори утворюють базис на площині, якщо вони:
   A. тільки одиничні неколінеарні.
   B. тільки ортогональні.
   C. довільні неколінеарні.
   D. тільки одиничні колінеарні.
24. Три вектори утворюють базис в просторі, якщо вони:
   A. довільні некомланарні.
   B. тільки одиничні некомланарні.
   C. довільні компланарні.
   D. тільки одиничні компланарні.
25. Скалярним добутком двох векторів називається:
   A. добуток їх довжин на синус кута між ними.
   B. добуток їх довжин.

C. добуток їх довжин на косинус кута між ними.

D. косинус кута між ними.

26. Векторним добутком двох векторів називається:

A. добуток їх довжин на косинус кута між ними.

B. добуток їх довжин на синус кута між ними.

C. добуток їх довжин.

D. синус кута між ними.

27. Мішаним добутком трьох векторів називається:

A. векторний добуток першого на векторний добуток другого і третього.

B. скалярний добуток першого на векторний добуток другого і третього.

C. добуток першого на скалярний добуток другого і третього.

D. добуток їх довжин.

28. Якщо вектори $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ та $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, то $\bar{a} + \bar{b}$ дорівнює:

A. $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

B. $(x_1 x_2, y_1 y_2, z_1 z_2)$

C. $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$

D. $(x_1 : x_2, y_1 : y_2, z_1 : z_2)$

29. Якщо вектори $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ та $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, то $\bar{a}\bar{b}$ дорівнює:

A. $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

B. $(x_1 x_2, y_1 y_2, z_1 z_2)$

C. $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$

D. $(x_1 : x_2, y_1 : y_2, z_1 : z_2)$

30. Якщо вектори $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ та $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, то $\bar{a} - \bar{b}$ дорівнює:

A. $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

B. $(x_1 x_2, y_1 y_2, z_1 z_2)$

C. $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$

D. $(x_1 : x_2, y_1 : y_2, z_1 : z_2)$

Тестові практичні завдання

Варіант №1

1. Дано точки A(3;-1;2) і B(-1;2;2). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-4}{5};\frac{-3}{5};0\right\}$	$\left\{\frac{-4}{5};\frac{3}{5};0\right\}$	$\left\{\frac{4}{5};\frac{-3}{5};0\right\}$	Інша відповідь

2. Дано вектори $\vec{a}=\{1,1,-1\}$, $\vec{b}=\{2,-1,3\}$, $\vec{n}=\{1,-2,1\}$. Розкласти вектор $\vec{d}=\{12,-9,11\}$ за векторами $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

А	Б	В	Г
$2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$	$2\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$	$4\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}$	Інша відповідь

3. Вказати взаємне розміщення ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, для яких $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

А	Б	В	Г
$\vec{a}\parallel\vec{b}$	$\vec{a}\perp\vec{b}$	$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|$=3, $|\vec{b}|$=1, $\angle(\vec{a},\vec{b})=45^\circ$.

А	Б	В	Г
3/2	$3/\sqrt{2}$	3	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{3,-2,-5\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-2;-3;5)$ в точку $B(3;2;1)$.

А	Б	В	Г
-5	25	45	Інша відповідь

6. Знайти ортогональну проекцію вектора $\tilde{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$, якщо $\tilde{a}=\{2,1,-2\},\vec{b}=\{1,2,-1\}$.

А	Б	В	Г
$\{2,1,-1\}$	$\{-1,2,1\}$	$\{1,2,-1\}$	Інша відповідь

7. Знайти координати векторного добутку $\left[2\vec{a}-\vec{b},2\vec{a}+\vec{b}\right]$, якщо $\vec{a}=\{2,1,-2\},\vec{b}=\{1,2,-1\}$.

А	Б	В	Г
$\{12,0,-12\}$	$\{-12,0,12\}$	$\{12,0,12\}$	Інша відповідь

8. Знайти площу трикутника ABC, якщо A(1, 2, 3), B(2, 0, 1), C(1, 0, 3).

А	Б	В	Г
$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$2\sqrt{5}$	Інша відповідь

9. Дано вектори $\vec{a} = \{3,4,-1\}$, $\vec{b} = \{2,3,5\}$, $\vec{n} = \{1,0,1\}$. Знайдіть $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

А	Б	В	Г
0	18	24	Інша відповідь

10.Знайти об'єм V тетраедра ABCD, якщо A(1,2,0),B(3,-1,2),C(0,7,-3), D(1,-1,2).

А	Б	В	Г
2/3	$1/3$	1/6	Інша відповідь

Варіант №2

1. Дано точки A(-3;1;-2) і B(1;-2;-1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-3}{\sqrt{11}};\frac{1}{\sqrt{11}};\frac{-1}{\sqrt{11}}\right\}$	$\left\{\frac{-3}{\sqrt{11}};\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{1}{\sqrt{11}}\right\}$	$\left\{\frac{3}{\sqrt{11}};\frac{1}{\sqrt{11}};\frac{-1}{\sqrt{11}}\right\}$	Інша відповідь

2. Знайти, при яких значеннях α, β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ та $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ колінеарні.

А	Б	В	Г
$\alpha = -4, \beta = -1$	$\alpha = -1, \beta = 4$	$\alpha = 4, \beta = -1$	Інша відповідь

3. Задані три вектори $\vec{a}\{3,-2\}, \vec{b}\{-2,1\}, \vec{c}\{7,-4\}$.Визначити коефіцієнти розкладу вектора $\vec{b}$, приймаючи в якості базису два інших.

А	Б	В	Г
$-\frac{1}{2}\tilde{a}+\frac{1}{2}\tilde{n}$	$\frac{1}{2}\tilde{a}-\frac{1}{2}\tilde{n}$	$\frac{1}{5}\tilde{a}-\frac{4}{5}\tilde{n}$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|$=6, $|\vec{b}|$=7, $\angle(\vec{a},\vec{b})$=$120°$.

А	Б	В	Г
-42	21	-21	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F} = \{-5,4,0\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(0;3;1)$ в точку $B(3;0;5)$.

А	Б	В	Г
11	27	3	Інша відповідь

6. Знайти ортогональну проекцію вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на вісь вектора $\vec{b}$, якщо $A(1,-1,1), B(0,-2,3), \vec{b}\{2,3,-1\}$.

А	Б	В	Г
$\left\{-1,\frac{-3}{2},\frac{1}{2}\right\}$	$\left\{-1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\}$	$\left\{1,\frac{-3}{2},\frac{-1}{2}\right\}$	Інша відповідь

7. Знайти координати векторних добутків $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ та $\left[2\vec{a}-\vec{b},2\vec{a}+\vec{b}\right]$, якщо $\vec{a}=\{1,-1,1\},\vec{b}=\{2,3,-1\}$.

А	Б	В	Г
$\{-2,-3,5\},\{-8,12,20\}$	$\{-2,3,5\},\{-8,12,20\}$	$\{-2,3,5\},\{-8,-12,20\}$	Інша відповідь

8. Знайти площу трикутника АВС, якщо А(3, -8, 1), В(-1, -3, 1), С(-1, 1, -2).

А	Б	В	Г
$\frac{50}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$	Інша відповідь

9. Дано вектори $\vec{a}=\{3,4,-1\}$, $\vec{b}=\{2,3,5\}$, $\vec{n}=\{1,0,1\}$. Знайдіть $\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{b}\vec{c}\right)$.

А	Б	В	Г
-24	12	24	Інша відповідь

10. Знайти об’єм V тетраедра ABCD, якщо A(3,-2,1),B(0,-1,2),C(3,1,-4), D(2,3,2).

А	Б	В	Г
38/3	38/6	19/3	Інша відповідь

Варіант № 3

1. Дано точки А(1;4;2) і В(-2;3;1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-4}{\sqrt{26}};\frac{3}{\sqrt{26}};\frac{-1}{\sqrt{26}}\right\}$	$\left\{\frac{4}{\sqrt{26}};\frac{-3}{\sqrt{26}};\frac{1}{\sqrt{26}}\right\}$	$\left\{\frac{4}{\sqrt{26}};\frac{-3}{\sqrt{26}};\frac{-1}{\sqrt{26}}\right\}$	Інша відповідь

2. Дано три вектора $\vec{a}=\{3,-2\},\vec{b}=\{-2,1\},\vec{n}=\{7,-4\}$. Знайти розклад вектора $\vec{a}$, приймаючи за базис два інших.

А	Б	В	Г
$2\vec{b}+\vec{c}$	$2\vec{b}-\vec{c}$	$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}$	Інша відповідь

3. Перша координата вектора $\vec{a}$ рівна 6, $\lvert\vec{a}\rvert = 2\sqrt{13}$. Визначити другу координату вектора $\vec{a}$.

А	Б	В	Г
$\pm 9\sqrt{3}$	± 6	± 4	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\lvert\vec{a}\rvert$=4, $\lvert\vec{b}\rvert$=2, $\angle(\vec{a},\vec{b})=90°$.

А	Б	В	Г
0	1	8	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{-5,2,-5\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(0;2;2)$ в точку $B(1;4;0)$.

А	Б	В	Г
9	11	19	Інша відповідь

6. Знайти ортогональну проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$, якщо $\vec{a}=\{3,0,5\}, C(-2,1,3), D(0,1,0)$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-18}{13},\frac{2}{13},\frac{27}{13}\right\}$	$\left\{\frac{-18}{13},0,\frac{-27}{13}\right\}$	$\left\{\frac{-18}{13},0,\frac{27}{13}\right\}$	Інша відповідь

7. Знайти координати векторних добутків $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ та $\left[2\vec{a}-\vec{b},2\vec{a}+\vec{b}\right]$, якщо $\vec{a}=\{3,0,5\},\vec{b}=\{-2,1,3\}$.

А	Б	В	Г
$\{-5,-19,3\},\{-20,-76,12\}$	$\{-5,19,3\},\{-20,-76,12\}$	$\{-5,-19,3\},\{20,76,-12\}$	Інша відповідь

8. Знайти площу трикутника ABC, якщо A(2, -1, 2), B(5, 3, 2), C(2, -1, 3).

А	Б	В	Г
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{5}{2}$	$2\sqrt{5}$	Інша відповідь

9. Дано вектори $\vec{a}=\{3,4,-1\}$, $\vec{b}=\{2,3,5\}$, $\vec{n}=\{1,0,1\}$. Знайдіть $\left(\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\vec{a}\vec{c}\right)$.

А	Б	В	Г
72	0	$\sqrt{72}$	Інша відповідь

10. Знайти об'єм V тетраедра ABCD, якщо A(1,2,3), B(3,2,1), C(0,-2,-3), D(-4,1,3).

А	Б	В	Г
16/3	13/6	13/3	Інша відповідь

Варіант № 4

1. Дано точки A(3;-1;2) і B(2;4;1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{1}{3\sqrt{3}};\frac{5}{3\sqrt{3}};\frac{-1}{3\sqrt{3}}\right\}$	$\left\{\frac{-1}{3\sqrt{3}};\frac{-5}{3\sqrt{3}};\frac{1}{3\sqrt{3}}\right\}$	$\left\{\frac{-1}{3\sqrt{3}};\frac{5}{3\sqrt{3}};\frac{-1}{3\sqrt{3}}\right\}$	Інша відповідь

2. Дано три вектора $\vec{a}=\{3,-2\},\vec{b}=\{-2,1\},\vec{n}=\{7,-4\}$. Знайти розклад вектора $\vec{b}$, приймаючи за базис два інших.

А	Б	В	Г
$2\vec{b}+\vec{c}$	$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}$	$\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$	Інша відповідь

3. Перша координата вектора $\vec{a}$ рівна 3, $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{58}$. Визначити другу координату вектора $\vec{a}$.

А	Б	В	Г
±7	±6	±4	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\left|\vec{a}\right|$=2, $\left|\vec{b}\right|$=3, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежно напрямлені.

А	Б	В	Г
-1	-6	6	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{-5,1,4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2;5;2)$ в точку $B(2;4;4)$.

А	Б	В	Г
9	8	7	Інша відповідь

6. Знайти ортогональну проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\{1,2,0\},\vec{b}=\{3,-2,1\}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-3}{14},\frac{1}{7},\frac{-1}{14}\right\}$	$\left\{\frac{-3}{14},\frac{1}{7},\frac{1}{14}\right\}$	$\left\{\frac{-3}{14},\frac{-2}{14},\frac{-1}{14}\right\}$	Інша відповідь

7. Знайти координати векторних добутків $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ та $\left[2\vec{a}-\vec{b},2\vec{a}+\vec{b}\right]$, якщо $\vec{a}=\{1,2,0\},\vec{b}=\{3,-2,1\}$.

А	Б	В	Г
$\{8,-4,-32\},\{2,-1,-8\}$	$\{2,-1,8\},\{8,-4,-32\}$	$\{2,-1,-8\},\{8,-4,-32\}$	Інша відповідь

8. Знайти площу трикутника АВС, якщо А(3, 1, -1), В(1, 0, 1), С(3, -1, 2).

А	Б	В	Г
$\frac{\sqrt{51}}{2}$	$\frac{\sqrt{53}}{2}$	$\frac{51}{2}$	Інша відповідь

9. Обчислити мішані добутки $\left(\vec{i}\vec{j}\vec{k}\right)$, $\left(\vec{k}\vec{j}\vec{i}\right)$, $\left(\vec{i}\vec{k}\vec{j}\right)$.

А	Б	В	Г
-1; -1;1	1; 1;-1	1; -1;-1	Інша відповідь

10. Знайти об'єм V тетраедра ABCD, якщо A(4,1,2),B(4,-1,1),C(2,5,3), D(3,-1,1).

А	Б	В	Г
$1/3$	1/6	2/3	Інша відповідь

Варіант № 5

1. Дано точки A(5;2;-1) і B(2;-2;2). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-3}{\sqrt{34}};\frac{-4}{\sqrt{34}};\frac{3}{\sqrt{34}}\right\}$	$\left\{\frac{-3}{\sqrt{34}};\frac{4}{\sqrt{34}};\frac{3}{\sqrt{34}}\right\}$	$\left\{\frac{3}{\sqrt{34}};\frac{-4}{\sqrt{34}};\frac{-3}{\sqrt{34}}\right\}$	Інша відповідь

2. Виразити вектор $\vec{c}$ через $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\{6,-18,12\},\vec{b}=\{8,7,3\},\vec{c}=\{-8,24,-16\}$.

А	Б	В	Г
$\frac{4\vec{a}}{3}$	$\frac{-4\vec{a}}{3}$	$\frac{-3\vec{a}}{4}$	Інша відповідь

3. Перша координата вектора $\vec{a}$ рівна 5, $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{34}$. Визначити другу координату вектора $\vec{a}$.

А	Б	В	Г
± 3	± 7	± 5	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\left|\vec{a}\right|$=5, $\left|\vec{b}\right|$=1, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однаково напрямлені.

А	Б	В	Г
0	-5	5	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,0,0\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-5;0;0)$ в точку $B(0;1;2)$.

А	Б	В	Г
25	10	0	Інша відповідь

6. Знайти ортогональну проекцію вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на вісь вектора $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$, якщо $A(3,-1,-2), B(-1,2,0), C(2,3,1), D(1,2,3)$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{5}{6},\frac{-5}{6},\frac{5}{3}\right\}$	$\left\{\frac{-5}{6},\frac{-5}{6},\frac{5}{3}\right\}$	$\left\{\frac{-5}{6},\frac{-5}{3},\frac{5}{6}\right\}$	Інша відповідь

7. Знайти координати векторних добутків $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ та $\left[2\vec{a}-\vec{b},2\vec{a}+\vec{b}\right]$, якщо $\vec{a}=\{3,-1,-2\},\vec{b}=\{-1,2,0\}$.

А	Б	В	Г
$\{4,2,5\},\{16,8,20\}$	$\{4,2,5\},\{16,-8,20\}$	$\{16,8,20\},\{4,2,5\}$	Інша відповідь

8. Знайти площу трикутника АВС і, якщо А(-1, 1, 3), В(2, 1, -1), С(1, 1, 1).

А	Б	В	Г
1	1/2	3/2	Інша відповідь

9. Обчислити мішані добутки $\left(\vec{i}\vec{k}\vec{j}\right)$, $\left(\vec{i}\times\left[\vec{j}\times\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)\right]\right)$.

А	Б	В	Г
1;-1	-1;-1	-1;1	Інша відповідь

10. Знайти об’єм V тетраедра ABCD, якщо A(2,-1,0),B(3,0,-1),C(2,3,-1), D(-1,-1,-2).

А	Б	В	Г
23/6	17/3	17/6	Інша відповідь

Варіант № 6

1. Дано точки А(3;-3;2) і В(1;1;1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-2}{\sqrt{21}};\frac{4}{\sqrt{21}};\frac{1}{\sqrt{21}}\right\}$	$\left\{\frac{-2}{\sqrt{21}};\frac{-4}{\sqrt{21}};\frac{1}{\sqrt{21}}\right\}$	$\left\{\frac{-2}{\sqrt{21}};\frac{4}{\sqrt{21}};\frac{-1}{\sqrt{21}}\right\}$	Інша відповідь

2. Знайти розклад вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\{2,1\}, \vec{b}=\{-1,3\}, \vec{n}=\{5,6\}$.

А	Б	В	Г
$\vec{n}=\vec{a}-3\vec{b}$	$\vec{c}=3\vec{a}+\vec{b}$	$\vec{n}=-3\vec{a}+\vec{b}$	Інша відповідь

3. Визначити, при яких значеннях α,β вектори $\vec{a}=\{-6,\beta,2\}, \vec{b}=\{\alpha,4,-1\}$ - колінеарні.

А	Б	В	Г
$3,-2$	$2,-12$	$3,-8$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=30°$.

А	Б	В	Г
$6\sqrt{3}$	$12\sqrt{3}$	6	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,5,4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-4;3;1)$ в точку $B(-4;4;5)$.

А	Б	В	Г
11	13	21	Інша відповідь

6. При якому значенні α вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярними $\vec{a}=\vec{i}+\alpha\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=\vec{j}+2\vec{k}$.

А	Б	В	Г
2	-2	0	Інша відповідь

7. Знайти векторний добуток $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, якщо $\vec{a}=2\vec{i}+11\vec{j}-10\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$.

А	Б	В	Г
$38\vec{i}-26\vec{j}-21\vec{k}$	$38\vec{i}+26\vec{j}-21\vec{k}$	$-38\vec{i}-26\vec{j}+21\vec{k}$	Інша відповідь

8. Знайти довжину висоти трикутника ABC, опущеної з вершини C, якщо A(1, 2, 3), B(2, 0, 1), C(1, 0, 3).

А	Б	В	Г
$2\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	Інша відповідь

9. Вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, які утворюють праву трійку, взаємно перпендикулярні. Обчислити $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$, якщо $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=2, |\vec{c}|=3$.

А	Б	В	Г
0	-24	24	Інша відповідь

10. Знайти висоту DH тетраедра ABCD, якщо A(1,2,0),B(3,-1,2),C(0,7,-3), D(1,-1,2).

А	Б	В	Г
$2/\sqrt{166}$	$2/\sqrt{66}$	$4/\sqrt{66}$	Інша відповідь

Варіант № 7

1. Дано точки A(2;5;1) і B(-2;-4;2). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{4}{7\sqrt{2}};\frac{-9}{7\sqrt{2}};\frac{1}{7\sqrt{2}}\right\}$	$\left\{\frac{-4}{7\sqrt{2}};\frac{-9}{7\sqrt{2}};\frac{1}{7\sqrt{2}}\right\}$	$\left\{\frac{4}{7\sqrt{2}};\frac{9}{7\sqrt{2}};\frac{1}{7\sqrt{2}}\right\}$	Інша відповідь

2. Знайти розклад вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\{-1,2\}, \vec{b}=\{4,3\}, \vec{n}=\{5,12\}$.

А	Б	В	Г
$\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$	$\vec{n}=-3\vec{a}+2\vec{b}$	$\vec{n}=2\vec{a}+3\vec{b}$	Інша відповідь

3. Вказати взаємне розміщення ненульових векторів a і b, для яких:
$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=|\vec{a}|-\left|\vec{b}\right|$.

А	Б	В	Г
$\vec{a}\perp\vec{b}$	$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $|\vec{a}|\geq\left|\vec{b}\right|$	$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $|\vec{a}|\leq\left|\vec{b}\right|$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|$=7, $\left|\vec{b}\right|$=5, $\angle(\vec{a},\vec{b})=0°$.

А	Б	В	Г
35	-35	0	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,-4,0\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-2;5;-5)$ в точку $B(-2;2;3)$.

А	Б	В	Г
6	10	12	Інша відповідь

6. При якому значенні α вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярними $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \alpha\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

А	Б	В	Г
3	0	-3	Інша відповідь

7. Знайти векторний добуток $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, якщо $\vec{a} = \{1, 2, -2\}, \vec{b} = \{8, 6, 4\}$.

А	Б	В	Г
$\{20, -20, -10\}$	$\{20, 20, -10\}$	$\{-20, -20, 10\}$	Інша відповідь

8. Знайти довжину висоти трикутника ABC, опущеної з вершини C, якщо A(1, 2, 3), B(2, 0, 1), C(1, 0, 3).

А	Б	В	Г
$\frac{5}{\sqrt{41}}$	$\frac{25}{41}$	$\frac{25}{\sqrt{41}}$	Інша відповідь

9. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $30°$. Обчислити $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$, якщо $|\vec{a}| = 6, \left|\vec{b}\right| = 3, |\vec{c}| = 3$ і трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ права.

А	Б	В	Г
27	$27\sqrt{3}$	54	Інша відповідь

10. Знайти висоту DH тетраедра ABCD, якщо A(3,-2,1),B(0,-1,2),C(3,1,-4), D(2,3,2).

А	Б	В	Г
$82\sqrt{150}$	$76/\sqrt{370}$	$24\sqrt{580}$	Інша відповідь

Варіант № 8

1. Дано точки A(1;-3;2) і B(3;-2;-1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{-3}{\sqrt{14}}\right\}$	$\left\{\frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$	$\left\{\frac{-2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$	Інша відповідь

2. Знайти розклад вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{2, -3\}, \vec{b} = \{1, 2\}, \vec{n} = \{9, 4\}$.

А	Б	В	Г
$5\vec{a} + 2\vec{b}$	$2\vec{a} - 5\vec{b}$	$2\vec{a} + 5\vec{b}$	Інша відповідь

3. Вказати взаємне розміщення ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, для яких $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$.

А	Б	В	Г
$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$	$\vec{a} \square \vec{b}$	$\vec{a} \perp \vec{b}$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$.

А	Б	В	Г
-6	9	$3\sqrt{3}$	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,-5,4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-4;4;-5)$ в точку $B(-4;0;1)$.

А	Б	В	Г
4	44	46	Інша відповідь

6. При якому значенні α вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярними $\vec{a}=2\vec{i}+\alpha\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

А	Б	В	Г
1	0	-6	Інша відповідь

7. Знайти векторний добуток $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, якщо $\vec{a}=\{1,-5,8\}, \vec{b}=\{3,6,-2\}$.

А	Б	В	Г
$\{38,26,21\}$	$\{-38,-26,21\}$	$\{-38,26,21\}$	Інша відповідь

8. Знайти довжину висоти трикутника АВС, опущеної з вершини С, якщо А(1, 2, 3), В(2, 0, 1), С(1, 0, 3).

А	Б	В	Г
1	1/2		Інша відповідь

9. Дано вектори $\vec{a}=\{1,-1,3\}$, $\vec{b}=\{-2,2,1\}$, $\vec{n}=\{3,-2,5\}$. Знайдіть $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

А	Б	В	Г
-11	-7	7	Інша відповідь

10. Знайти висоту DH тетраедра ABCD, якщо A(1,2,3),B(3,2,1),C(0,-2,-3), D(-4,1,3).

А	Б	В	Г
11/6	10/3	13/9	Інша відповідь

Варіант № 9

1. Дано точки А(-3;-1;2) і В(2;-1;-1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-5}{\sqrt{34}};\frac{0}{\sqrt{34}};\frac{-3}{\sqrt{34}}\right\}$	$\left\{\frac{5}{\sqrt{34}};\frac{3}{\sqrt{34}};\frac{0}{\sqrt{34}}\right\}$	$\left\{\frac{5}{\sqrt{34}};\frac{0}{\sqrt{34}};\frac{-3}{\sqrt{34}}\right\}$	Інша відповідь

2. Знайти розклад вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\{5,-2\},\vec{b}=\{1,4\},\vec{n}=\{3,-10\}$.

А	Б	В	Г
$5\vec{a}-2\vec{b}$	$\vec{a}-2\vec{b}$	$\vec{a}+2\vec{b}$	Інша відповідь

3. При якому значенні коефіцієнта α вектори $\vec{a}=\{5,6\}$ і $\vec{b}=\{3+\alpha,-2+2\alpha\}$ колінеарні?

А	Б	В	Г
7	2	-3	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|$=3, $|\vec{b}|$=2, $\angle(\vec{a},\vec{b})=240°$.

А	Б	В	Г
3	-3	-6	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,-2,5\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-1;0;-5)$ в точку $B(-2;3;4)$.

А	Б	В	Г
46	44	34	Інша відповідь

6. При якому значенні α вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярними $\vec{a}=\alpha\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\alpha\vec{k}$.

А	Б	В	Г
-2	2	0	Інша відповідь

7. Дано: $|\vec{a}|=10,|\vec{b}|=2$ і $\vec{a}\vec{b}=12$.Знайти $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

А	Б	В	Г
20	32	16	Інша відповідь

8. Знайти довжину висоти трикутника ABC, опущеної з вершини С, якщо А(1, 2, 3), В(2, 0, 1), С(1, 0, 3).

А	Б	В	Г
$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{53}}{3}$	$\sqrt{53}$	Інша відповідь

9. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $30°$. Обчислити $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$, якщо $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=3, |\vec{c}|=3$ і трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ліва.

А	Б	В	Г
10	-6	-27	Інша відповідь

10. Знайти висоту DH тетраедра ABCD, якщо A(4,1,2),B(4,-1,1),C(2,5,3), D(3,-1,1).

А	Б	В	Г
$2/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{6}$	$3/\sqrt{6}$	Інша відповідь

Варіант №10

1. Дано точки A(4;2;1) і B(-2;-1;-1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-6}{7};\frac{-3}{7};\frac{-2}{7}\right\}$	$\left\{\frac{-6}{7};\frac{3}{7};\frac{-2}{7}\right\}$	$\left\{\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{2}{7}\right\}$	Інша відповідь

2. Знайти розклад вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\{1,-2\}, \vec{b}=\{1,4\}, \vec{n}=\{4,4\}$.

А	Б	В	Г
$2\vec{a}-2\vec{b}$	$\vec{a}+2\vec{b}$	$2\vec{a}+2\vec{b}$	Інша відповідь

3. Вказати взаємне розміщення ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, для яких $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|<\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

А	Б	В	Г
$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)>\frac{\pi}{2}$	$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $\|\vec{a}\|\geq\|\vec{b}\|$	$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)<\frac{\pi}{2}$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|$=2, $|\vec{b}|$=3, $\angle(\vec{a},\vec{b})$=$180°$.

А	Б	В	Г
0	6	-6	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,-3,3\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(1;5;0)$ в точку $B(3;3;-5)$.

А	Б	В	Г
11	1	19	Інша відповідь

6. При якому значенні α вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярними $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+\alpha\vec{k}, \vec{b}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$.

А	Б	В	Г
-9/2	-2/9	-1	Інша відповідь

7. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$, обчислити $\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2$.

А	Б	В	Г
24	25	144	Інша відповідь

8. Знайти довжину висоти трикутника ABC, опущеної з вершини C, якщо A(1, 2, 3), B(2, 0, 1), C(1, 0, 3).

А	Б	В	Г
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	Інша відповідь

9. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, заданих своїми координатами:: $\vec{a}=\{1,-1,1\}$, $\vec{b}=\{7,3,-5\}$, $\vec{c}=\{-2,2,-2\}$.

А	Б	В	Г
48	-6	0	Інша відповідь

10.Знайти висоту DH тетраедра ABCD, якщо A(2,-1,0), B(3,0,-1), C(2,3,-1), D(-1,-1,-2).

А	Б	В	Г
	$17\sqrt{26}$		Інша відповідь

Варіант №11

1. Дано точки A(5;-3;1) і B(2;-3;-1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{0}{\sqrt{13}};\frac{-2}{\sqrt{13}}\right\}$	$\left\{\frac{-3}{\sqrt{13}};\frac{0}{\sqrt{13}};\frac{-2}{\sqrt{13}}\right\}$	$\left\{\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{0}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$	Інша відповідь

2. Знайти розклад вектора $\vec{d}$ за векторами $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{a}=\{1,-2,0\}, \vec{b}=\{3,-2,1\}, \vec{n}=\{1,0,-2\}, \vec{d}=\{5,-8,3\}$.

А	Б	В	Г
$\vec{d}=\vec{a}-2\vec{n}$	$\vec{d}=3\vec{a}+\vec{b}+\vec{n}$	$\vec{d}=3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$	Інша відповідь

3. Вказати взаємне розміщення ненульових векторів a і b, для яких $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| > \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

А	Б	В	Г
$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) < \frac{\pi}{2}$	$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $\lvert\vec{a}\rvert \geq \lvert\vec{b}\rvert$	$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) > \frac{\pi}{2}$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\lvert\vec{a}\rvert$=6, $\lvert\vec{b}\rvert$=7, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 270°$.

А	Б	В	Г
0	-42	42	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F} = \{5,-4,2\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2;4;-3)$ в точку $B(4;3;0)$.

А	Б	В	Г
8	12	20	Інша відповідь

6. Знайти косинус внутрішнього кута при вершині А трикутника АВС, якщо A(1,2,3),B(2,-2,1),C(1,0,3).

А	Б	В	Г
$4/\sqrt{21}$	2	$1/\sqrt{21}$	Інша відповідь

7. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $\lvert\vec{a}\rvert = 3, \lvert\vec{b}\rvert = 4$, бчислити $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right]^2$.

А	Б	В	Г
1102	30	60	Інша відповідь

8. На векторах $\vec{a} = \{2,3,1\}$ і $\vec{b} = \{-1,1,2\}$, які відкладені з однієї точки, побудований трикутник. Знайти площу цього трикутника.

А	Б	В	Г
$\frac{5}{2}\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	Інша відповідь

9. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, заданих своїми координатами: $\vec{a} = \{3,5,1\}$, $\vec{b} = \{4,0,-1\}, \vec{c} = \{2,1,1\}$.

А	Б	В	Г
-9	-23	-17	Інша відповідь

10. Обчислити об’єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках A(2;-1;1), B(5;5;4), C(3;2;-1) та D(4;1;3).

А	Б	В	Г
6	3	18	Інша відповідь

Варіант №12

1. Дано точки A(3;1;2) і B(0;-2;1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{3}{\sqrt{19}};\frac{3}{\sqrt{19}};\frac{1}{\sqrt{19}}\right\}$	$\left\{\frac{-3}{\sqrt{19}};\frac{-1}{\sqrt{19}};\frac{-3}{\sqrt{19}}\right\}$	$\left\{\frac{-3}{\sqrt{19}};\frac{-3}{\sqrt{19}};\frac{-1}{\sqrt{19}}\right\}$	Інша відповідь

2. Знайти розклад вектора $\vec{d}$ за векторами $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{a}=\{6,-5,1\},\vec{b}=\{2,2,-1\},\vec{c}=\{-1,-2,0\}\,\vec{d}=\{-1,6,5\}$.

А	Б	В	Г
$\vec{d}=\left(2\vec{a}-93\vec{b}+155\vec{c}\right)$	$\vec{d}=\left(2\vec{a}-93\vec{b}-155\vec{n}\right)$	$\vec{d}=\left(6\vec{a}-9\vec{b}+155\vec{n}\right)$	Інша відповідь

3. Перша координата вектора $\vec{a}$ рівна -1, $|\vec{a}|=\sqrt{26}$. Визначити другу координату вектора $\vec{a}$.

А	Б	В	Г
±2	±6	±5	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|$=5, $|\vec{b}|$=7, $\angle(\vec{a},\vec{b})=0°$.

А	Б	В	Г
0	35	-35	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,-3,4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(0;0;-2)$ в точку $B(2;0;-4)$.

А	Б	В	Г
2	6	18	Інша відповідь

6. Знайти косинус внутрішнього кута при вершині А трикутника АВС, якщо A(1,1,2), B(3,1,-1), C(2,3,-4)

А	Б	В	Г
$44\sqrt{591}$	$48\sqrt{101}$	$20/\sqrt{533}$	Інша відповідь

7. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи,що $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$,обчислити $\left[\left(3\vec{a}+\vec{b}\right),\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\right]^2$.

А	Б	В	Г
1172	48	24	Інша відповідь

8. На векторах $\vec{a}=\{2,3,1\}$ і $\vec{b}=\{-1,1,2\}$, які відкладені з однієї точки, побудований трикутник. Знайти довжину висоти між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ цього трикутника.

А	Б	В	Г
$\sqrt{\frac{12}{21}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{21}$	$5\sqrt{\frac{3}{14}}$	Інша відповідь

9. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, заданих своїми координатами:: $\vec{a}=\{2,1,0\}, \vec{b}=\{3,4,-1\}, \vec{c}=\{-1,-3,1\}$.

А	Б	В	Г
0	-2	-12	Інша відповідь

10. Знайти об’єм трикутної піраміди ABCD, якщо A(6;1;4), B(2;-2;5), C(7;1;3) та D(1;-3;7).

А	Б	В	Г
$\frac{24}{3}$	$\frac{31}{3}$	$\frac{23}{3}$	Інша відповідь

Варіант №13

1. Дано точки A(2;0;-3) і B(-3;-3;2). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-5}{\sqrt{35}};\frac{-3}{\sqrt{35}};\frac{-1}{\sqrt{35}}\right\}$	$\left\{\frac{5}{\sqrt{35}};\frac{-3}{\sqrt{35}};\frac{-1}{\sqrt{35}}\right\}$	$\left\{\frac{-5}{\sqrt{35}};\frac{3}{\sqrt{35}};\frac{-1}{\sqrt{35}}\right\}$	Інша відповідь

2. Знайти розклад вектора $\vec{d}$ за векторами $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{a}=\{3,-2,1\}, \vec{b}=\{-1,1,-2\}, \vec{n}=\{2,1,-3\}, \vec{d}=\{11,-6,5\}$.

А	Б	В	Г
$3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{n}$	$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{n}$	$2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{n}$	Інша відповідь

3. Перша координата вектора $\vec{a}$ рівна 3, $|\vec{a}|=3\sqrt{5}$. Визначити другу координату вектора $\vec{a}$.

А	Б	В	Г
±3	±4	±6	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами: $\vec{a} = \{3, 2, -5\}, \vec{b} = \{10, 1, 2\}$.

А	Б	В	Г
22	42	38	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F} = \{5, -3, 1\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2; 3; -5)$ в точку $B(2; 1; -1)$.

А	Б	В	Г
2	12	10	Інша відповідь

6. Знайти косинус внутрішнього кута при вершині A трикутника ABC, якщо A(2,-1,2),B(3,1,2),C(2,-1,3)

А	Б	В	Г
0	1/2	1	Інша відповідь

7. Дано вектори $\vec{a} = \{3, -1, -2\}$, $\vec{b} = \{1, 2, -1\}$. Знайти координати векторного добутку $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

А	Б	В	Г
$\{5, 1, 7\}$	$\{5, 7, 1\}$	$\{3, -2, 2\}$	Інша відповідь

8. На векторах $\vec{a} = \{2, 3, 1\}$ і $\vec{b} = \{-1, 1, 2\}$, які відкладені з однієї точки, побудований трикутник. Знайти довжину висоти між векторами $\vec{b}$ і $\vec{c}$ цього трикутника.

А	Б	В	Г
$5\sqrt{\frac{3}{14}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{21}$	$\frac{1}{2}\sqrt{59}$	Інша відповідь

9. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, заданих своїми координатами: $\vec{a} = \{1, 2, 3\}, \vec{b} = \{5, -2, 1\}, \vec{c} = \{2, 1, 2\}$.

А	Б	В	Г
0	19	6	Інша відповідь

10. Знайти об’єм трикутної піраміди ABCD, якщо A(6;1;4), B(2;-2;5), C(7;1;3) та D(1;-3;7).

А	Б	В	Г
$\frac{62}{3}$	$\frac{82}{3}$	$\frac{95}{16}$	Інша відповідь

Варіант №14

1. Дано точки A(-4;2;-1) і B(0;0;1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-4}{2\sqrt{6}};\frac{-2}{2\sqrt{6}};\frac{-2}{2\sqrt{6}}\right\}$	$\left\{\frac{-4}{2\sqrt{6}};\frac{2}{2\sqrt{6}};\frac{-2}{2\sqrt{6}}\right\}$	$\left\{\frac{4}{2\sqrt{6}};\frac{-2}{2\sqrt{6}};\frac{2}{2\sqrt{6}}\right\}$	Інша відповідь

2. Знайти розклад вектора $\vec{d}$ за векторами $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{a}=\{-1,2,3\},\vec{b}=\{4,-1,3\},\vec{n}=\{2,5,0\},\vec{d}=\{-3,4,6\}$.

А	Б	В	Г
$\left(67\vec{a}-5\vec{b}-3\vec{n}\right)/31$	$\left(39\vec{a}-18\vec{b}+8\vec{n}\right)/67$	$\left(67\vec{a}-3\vec{b}-8\vec{n}\right)/46$	Інша відповідь

3. При якому значенні коефіцієнта α вектори $\vec{a}=\{1,3\}$ і $\vec{b}=\{3+2\alpha,2(4\alpha+5)\}$ колінеарні?

А	Б	В	Г
3	2	1	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами: $\vec{a}=\{1,0,3\}$, $\vec{b}=\{-4,15,1\}$.

А	Б	В	Г
7	-1	1	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,5,-5\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2;-3;2)$ в точку $B(0;5;2)$.

А	Б	В	Г
20	30	50	Інша відповідь

6. Знайти косинус внутрішнього кута при вершині А трикутника АВС, якщо A(3,1,-2),B(1,0,1),C(3,-1,2).

А	Б	В	Г
$\sqrt{7/10}$	$\sqrt{3/5}$	$\sqrt{1/2}$	Інша відповідь

7. Дано вектори $\vec{a}=\{3,-1,-2\},\vec{b}=\{1,2,-1\}$. Знайти координати векторного добутку $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{b}\right]$.

А	Б	В	Г
$\{7,2,14\}$	$\{10,-2,14\}$	$\{10,2,14\}$	Інша відповідь

8. На векторах $\vec{a}=\{2,3,1\}$ і $\vec{b}=\{-1,1,2\}$, які відкладені з однієї точки, побудований трикутник. Знайти довжину висоти між векторами $\vec{a}$ і $\vec{c}$ цього трикутника.

А	Б	В	Г
$\frac{9}{\sqrt{2}}$	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	Інша відповідь

9. Дано вектори $\vec{a}=\{3,4,-1\}$, $\vec{b}=\{2,3,5\}$, $\vec{n}=\{1,0,1\}$. Знайдіть $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

А	Б	В	Г
1	16	24	Інша відповідь

10. Дано вершини тетраедра A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7) та D(-5;-4;8). Знайти довжину його висоти, що опущена з вершини D.

А	Б	В	Г
11	14	17	Інша відповідь

Варіант №15

1. Дано точки A(2;0;-2) і B(3;-1;1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{1}{\sqrt{11}};\frac{3}{\sqrt{11}}\right\}$	$\left\{\frac{1}{\sqrt{11}};\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{3}{\sqrt{11}}\right\}$	$\left\{\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{1}{\sqrt{11}};\frac{-3}{\sqrt{11}}\right\}$	Інша відповідь

2. Знайти розклад вектора $\vec{d}$ за векторами $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{a}=\{3,-1,8\},\vec{b}=\{2,-6,-3\},\vec{n}=\{-1,0,1\},\vec{d}=\{18,9,0\}$.

А	Б	В	Г
$\left(126\vec{a}-84\vec{b}-1107\vec{n}\right)/67$	$\left(98\vec{a}-116\vec{b}-1148\vec{n}\right)/67$	$\left(99\vec{a}-117\vec{b}-1143\vec{n}\right)/67$	Інша відповідь

3. При якому значенні коефіцієнта α вектори $\vec{a}=\{3,3\alpha\}$ і $\vec{b}=\{4-\alpha,4\}$ колінеарні?

А	Б	В	Г
2	5	-3	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами: $\vec{a}=\{2,1,5\}$, $\vec{b}=\{7,-9,-1\}$.

А	Б	В	Г
24	10	0	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F} = \{5, 4, -5\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(3;0;2)$ в точку $B(0;5;0)$.

А	Б	В	Г
5	15	20	Інша відповідь

6. Знайти косинус внутрішнього кута при вершині А трикутника ABC, якщо A(-1,1,3),B(2,-1,1),C(1,1,1).

А	Б	В	Г
5/34	16/21	9/8	Інша відповідь

7. Дано вектори $\vec{a} = \{3, -1, -2\}$, $\vec{b} = \{1, 2, -1\}$. Знайти координати векторного добутку $\left[\left(2\vec{a} - \vec{b}\right), \left(2\vec{a} + \vec{b}\right)\right]$.

А	Б	В	Г
$\{19, 6, 37\}$	$\{20, 4, 28\}$	$\{21, 1, 25\}$	Інша відповідь

8. Обчислити площу паралелограма, три вершини якого знаходяться у точках A(4; 3; 2), B(2; 3; 4), C(1; 1; 1).

А	Б	В	Г
$9\sqrt{5}$	$4\sqrt{6}$	$3\sqrt{10}$	Інша відповідь

9. Дано вектори $\vec{a} = \{3, 4, -1\}$, $\vec{b} = \{2, 3, 5\}$, $\vec{n} = \{1, 0, 1\}$. Знайдіть $\left(\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{b}\vec{c}\right)$.

А	Б	В	Г
26	25	24	Інша відповідь

10. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

А	Б	В	Г
13	17	3	Інша відповідь

Варіант №16

1. Дано точки A(0;0;-2) і B(5;-2;1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{5}{\sqrt{38}}; \frac{-2}{\sqrt{38}}; \frac{3}{\sqrt{38}}\right\}$	$\left\{\frac{5}{\sqrt{38}}; \frac{-3}{\sqrt{38}}; \frac{2}{\sqrt{38}}\right\}$	$\left\{\frac{-5}{\sqrt{38}}; \frac{2}{\sqrt{38}}; \frac{-3}{\sqrt{38}}\right\}$	Інша відповідь

2. Відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 19, \left|\vec{b}\right| = 13$ і $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 22$. Обчислити $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$.

А	Б	В	Г
4	8	24	Інша відповідь

3. Дано вектори $\vec{a}=\{1,1,-1\}$, $\vec{b}=\{2,-1,3\}$, $\vec{n}=\{1,-2,1\}$. Розкласти вектор $\vec{d}=\{12,-9,11\}$ за векторами $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

А	Б	В	Г
$2\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$	$2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$	$4\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ: $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5, \varphi=0$.

А	Б	В	Г
10	18	20	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,2,-4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(1;-1;4)$ в точку $B(0;0;0)$.

А	Б	В	Г
23	19	13	Інша відповідь

6. Знайти скалярний добуток $(\vec{a},\vec{b})$ та модулі $|\vec{a}|,|\vec{b}|,|\vec{a}-\vec{b}|,|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},\vec{b}=\vec{j}+2\vec{k}$.

А	Б	В	Г
$0,\sqrt{6},\sqrt{5},\sqrt{11},\sqrt{11}$	$0,\sqrt{7},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{11}$	$0,\sqrt{5},\sqrt{3},\sqrt{10},\sqrt{11}$	Інша відповідь

7. Дано точки A(2,-1,2),B(1,2,-1), та C(3,2,1).Знайти координати векторного добутку $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]$.

А	Б	В	Г
$\{5,4,-8\}$	$\{6,-4,-6\}$	$\{-6,2,-6\}$	Інша відповідь

8. Дано трикутник з вершинами A(-1; 1; 5), B(3; -4; 5), C(-1;5;2). Знайти довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

А	Б	В	Г
3	4	5	Інша відповідь

9. Дано вектори $\vec{a}=\{3,4,-1\}$, $\vec{b}=\{2,3,5\}$, $\vec{n}=\{1,0,1\}$. Знайдіть $\left(\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\vec{a}\vec{c}\right)$.

А	Б	В	Г
72	54	13	Інша відповідь

10. Знайти об’єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\vec{a}=4\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=-2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}, \vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$.

А	Б	В	Г
101	94	76	Інша відповідь

Варіант №17

1. Дано точки А(3;-1;1) і В(2;0;-2). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{-3}{\sqrt{11}}\right\}$	$\left\{\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{1}{\sqrt{11}};\frac{-3}{\sqrt{11}}\right\}$	$\left\{\frac{1}{\sqrt{11}};\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{3}{\sqrt{11}}\right\}$	Інша відповідь

2. Відомо, що $|\vec{a}|=23, |\vec{b}|=11$ і $|\vec{a}+\vec{b}|=20$. Обчислити $|\vec{a}-\vec{b}|$.

А	Б	В	Г
40	32	30	Інша відповідь

3. Знайти розклад вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\{5,-2\}, \vec{b}=\{1,4\}, \vec{n}=\{3,-10\}$.

А	Б	В	Г
$5\vec{a}-2\vec{b}$	$\vec{a}-2\vec{b}$	$\vec{a}+2\vec{b}$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ: $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=9, \varphi=\frac{\pi}{2}$.

А	Б	В	Г
12	1	0	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{-5,3,0\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(5;4;1)$ в точку $B(3;1;0)$.

А	Б	В	Г
1	19	25	Інша відповідь

6. Знайти скалярний добуток $(\vec{a},\vec{b})$ та $|\vec{a}|,|\vec{b}|,|\vec{a}-\vec{b}|,|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

А	Б	В	Г
$13,\sqrt{5},\sqrt{5},12,4\sqrt{23}$	$9,\sqrt{13},\sqrt{14},3,3\sqrt{5}$	$1,\sqrt{17},\sqrt{15},6,11\sqrt{19}$	Інша відповідь

7. Дано точки A(2,-1,2),B(1,2,-1), та C(3,2,1).Знайти координати векторного добутку $\left[\left(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}\right),\overrightarrow{CB}\right]$.

А	Б	В	Г
$\{-12,8,12\}$	$\{-12,8,-12\}$	$\{-12,15,-9\}$	Інша відповідь

8. Знайти площу трикутника ABC, якщо A(1, 2, 3), B(2, 0, 1), C(1, 0, 3).

А	Б	В	Г
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	Інша відповідь

9. Обчислити мішані добутки $\left(\vec{i}\vec{j}\vec{k}\right)$, $\left(\vec{k}\vec{j}\vec{i}\right)$, $\left(\vec{i}\vec{k}\vec{j}\right)$.

А	Б	В	Г
-1; 0;-1	0; 0;-1	1; -1;-1	Інша відповідь

10. Знайти об’єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k},\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k},\vec{c}=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.

А	Б	В	Г
30	12	7	Інша відповідь

Варіант №18

1. Дано точки A(5;-2;1) і B(1;1;1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-4}{5};\frac{-3}{5};\frac{0}{5}\right\}$	$\left\{\frac{-4}{5};\frac{3}{5};\frac{0}{5}\right\}$	$\left\{\frac{4}{5};\frac{3}{5};\frac{0}{5}\right\}$	Інша відповідь

2. Нехай $|\vec{a}|=3,\left|\vec{b}\right|=2$ і $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60^\circ$. Знайти $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|$.

А	Б	В	Г
$2\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$	$2\sqrt{18}$	Інша відповідь

3. Вказати взаємне розміщення ненульових векторів a і b, для яких: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

А	Б	В	Г
$\vec{a}\,\square\,\vec{b}$	$\vec{a}\perp\vec{b}$	$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ: $|\vec{a}|=6$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

А	Б	В	Г
6	-7	-6	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{-5,1,5\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(4;0;1)$ в точку $B(3;3;1)$.

А	Б	В	Г
2	8	10	Інша відповідь

6. Знайти скалярний добуток $(\vec{a},\vec{b})$ та $|\vec{a}|,|\vec{b}|,|\vec{a}-\vec{b}|,|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k},\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.

А	Б	В	Г
3	-2	-6	Інша відповідь

7. Дано вектори $\vec{a}=\{0,1,2\},\vec{b}=\{-2,-1,0\}$. При якому значенні z вектор $\vec{n}=\{3,4,z\}$ ортогональний вектору $[\vec{a},\vec{b}]$?

А	Б	В	Г
3	5	-6	Інша відповідь

8. Знайти площу трикутника, якщо відомі координати його вершин A(1; 6; 4), B(3; 1; 0), C(4 -1;-6).

А	Б	В	Г
$\frac{3}{2}\sqrt{61}$	$\frac{3}{5}\sqrt{65}$	$\frac{10}{9}\sqrt{35}$	Інша відповідь

9. Обчислити мішані добутки $(\vec{i}\vec{k}\vec{j})$, $(\vec{i}\vec{j}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}))$.

А	Б	В	Г
0;2	-2;-1	-1;1	Інша відповідь

11. Обчислити об'єм піраміди ABCD з вершинами у точках A(1,3,-2), B(5,2,3), C(2,-1,-2), D(2,0,3).

А	Б	В	Г
$\frac{70}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{35}{3}$	Інша відповідь

Варіант №19

1. Дано точки A(2;2;2) і B(-2;1;-3). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-4}{\sqrt{42}};\frac{-1}{\sqrt{42}};\frac{-5}{\sqrt{42}}\right\}$	$\left\{\frac{-4}{\sqrt{42}};\frac{1}{\sqrt{42}};\frac{-5}{\sqrt{42}}\right\}$	$\left\{\frac{4}{\sqrt{42}};\frac{-1}{\sqrt{42}};\frac{-5}{\sqrt{42}}\right\}$	Інша відповідь

2. Нехай $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2$ і $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60°$. Знайти $\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|$.

А	Б	В	Г
$4\sqrt{13}$	$3\sqrt{3}$	$2\sqrt{10}$	Інша відповідь

3. Перша координата вектора $\vec{a}$ рівна 2, $|\vec{a}|=2\sqrt{5}$. Визначити другу координату вектора $\vec{a}$.

А	Б	В	Г
± 5	± 2	± 4	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ: $|\vec{a}|$=3, $|\vec{b}|$=1, $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

.А	Б	В	Г
3/2	$3/\sqrt{2}$	3	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{-5,5,4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2;2;3)$ в точку $B(2;4;1)$.

А	Б	В	Г
2	10	18	Інша відповідь

6. Знайти скалярний добуток $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ та $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{a}-\vec{b}|, |\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$.

А	Б	В	Г
$11, \sqrt{23}, \sqrt{18}, 5\sqrt{5}, -6$	$-5, \sqrt{14}, \sqrt{21}, 3\sqrt{5}, 5$	$3, \sqrt{22}, \sqrt{15}, 8\sqrt{19}, 27$	Інша відповідь

7. При яких значення x і y вектор $\vec{n}=\{x,y,24\}$ колінеарний вектору $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, де $\vec{a}=\{1,-2,3\}, \vec{b}=\{-4,0,5\}$.

А	Б	В	Г
x=45,y=8	x=44,y=21	x=30,y=51	Інша відповідь

8. Знайти довжину висоти BD трикутника ABC, якщо відомі координати його вершин A(-5; 6; -2), B(-1; 1; -2), C(-1; -3; 1).

А	Б	В	Г
$\frac{1}{\sqrt{106}}$	$\frac{42}{\sqrt{89}}$	$\frac{25}{\sqrt{106}}$	Інша відповідь

9. Дано вектори $\vec{a}=\{5,3,2\}$, $\vec{b}=\{1,0,1\}$, $\vec{n}=\{-1,4,3\}$. Знайдіть $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

А	Б	В	Г
0	-24	-18	Інша відповідь

10. Об’єм трикутної піраміди дорівнює 9. Три її вершини знаходяться у точках A(4;-1;2), B(5;1;4), C(3;2;-1). Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона знаходиться осі Oz.

А	Б	В	Г
(0;0;3)	(0;0;-3)	(-4;9;-9)	Інша відповідь

Варіант №20

1. Дано точки A(-1;4;2) і B(4;3;7). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-5}{\sqrt{51}};\frac{1}{\sqrt{51}};\frac{-5}{\sqrt{51}}\right\}$	$\left\{\frac{5}{\sqrt{51}};\frac{-1}{\sqrt{51}};\frac{5}{\sqrt{51}}\right\}$	$\left\{\frac{5}{\sqrt{51}};\frac{1}{\sqrt{51}};\frac{5}{\sqrt{51}}\right\}$	Інша відповідь

2. Нехай $|\vec{a}|=3, \left|\vec{b}\right|=2$ і $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60^\circ$. Знайти $\left|\vec{b}-\vec{a}\right|$.

А	Б	В	Г
$\sqrt{7}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	Інша відповідь

3. При якому значенні коефіцієнта α вектори $\vec{a}=\{-3,2\alpha-7\}$ і $\vec{b}=\{9-2\alpha,5\}$ колінеарні?

А	Б	В	Г
-1	2	5	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ: $|\vec{a}|$=6, $\left|\vec{b}\right|$=7, $\varphi=120^\circ$.

А	Б	В	Г
-42	21	-21	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,1,1\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-3;1;3)$ в точку $B(-2;0;5)$.

А	Б	В	Г
8	2	6	Інша відповідь

6. Знайти скалярний добуток $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ та $|\vec{a}|,\left|\vec{b}\right|,\left|\vec{a}-\vec{b}\right|,\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, якщо $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}, \vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$.

А	Б	В	Г
-13	15	18	Інша відповідь

7. Знайдіть проекцію вектора $\vec{p}=\left(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\right)\left(\vec{i}+5\vec{j}\right)$ на вісь, що має напрямок вектора $\vec{q}=\{2,-1,2\}$.

А	Б	В	Г
$\frac{25}{3}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{38}{3}$	Інша відповідь

8. Дано точки A(1; 2; 0), B(3; 0; -3) та C(5; 2; 6). Знайти площу трикутника ABC.

А	Б	В	Г
1	14	25	Інша відповідь

9. Вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, які утворюють праву трійку, взаємно перпендикулярні. Обчислити $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$, якщо $|\vec{a}|=4, \left|\vec{b}\right|=2, |\vec{c}|=3$.

А	Б	В	Г
25	9	24	Інша відповідь

10. Дано вершини піраміди A(1;2;1), B(3;0;2), C(5;2;7) та D(-6;-5;8). Знайти довжину висоти піраміди, опущеної з вершини D.

А	Б	В	Г
8	19	11	Інша відповідь

Варіант №21

1. Дано точки A(-1;1;-1) і B(3;2;-1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-4}{\sqrt{17}};\frac{-1}{\sqrt{17}};\frac{0}{\sqrt{17}}\right\}$	$\left\{\frac{4}{\sqrt{17}};\frac{-1}{\sqrt{17}};\frac{0}{\sqrt{17}}\right\}$	$\left\{\frac{4}{\sqrt{17}};\frac{1}{\sqrt{17}};\frac{0}{\sqrt{17}}\right\}$	Інша відповідь

2. На площині задано два вектори $\vec{a}=\{2,1\}, \vec{b}=\{1,0\}$. Знайти лінійний розклад вектора $\vec{n}=\{9,1\}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А	Б	В	Г
$\vec{a}-7\vec{b}$	$\vec{a}+7\vec{b}$	$\vec{a}+8\vec{b}$	Інша відповідь

3. При якому значенні коефіцієнта α вектори $\vec{a}=\{-4,8\}$ і $\vec{b}=\{2\alpha+1,-2\alpha-6\}$ колінеарні?

А	Б	В	Г
5	3	2	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ: $|\vec{a}|$=4, $|\vec{b}|$=2, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

А	Б	В	Г
0	1	8	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,2,4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-5;0;3)$ в точку $B(-4;5;3)$.

А	Б	В	Г
5	10	15	Інша відповідь

6. Обчислити косинус кута, побудованого на векторах $\vec{a}=\{2,-4,4\}$ і $\vec{b}=\{-3,2,6\}$.

А	Б	В	Г
5/32	$5/21$	5/22	Інша відповідь

7. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи, що він перпендикулярний векторам $\vec{a}\{2,-3,1\}$ та $\vec{b}\{1,-2,3\}$, та задовольняє умову $\vec{x}\left(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right)=10$

А	Б	В	Г
$\{7,5,1\}$	$\{5,2,3\}$	$\{3,6,8\}$	Інша відповідь

8. Дано вершини трикутника A(1; -1; 2), B(5; -6; 2) та C(1; 3; -1). Обчислити довжину його висоти, яка опущена з вершини B на сторону AC.

А	Б	В	Г
-4	-3	5	Інша відповідь

9. Дано вектори $\vec{a}$ = $\{1,-1,3\}$, $\vec{b}$ = $\{-2,2,1\}$, $\vec{n}=\{3,-2,5\}$. Знайдіть $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

А	Б	В	Г
-7	-6 6		Інша відповідь

10. Об'єм піраміди V=5, три її вершини лежать у точках A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3) . Знайти координати четверної вершини D, якщо відомо, що вона знаходиться на осі Oy.

А	Б	В	Г
D1(2;-3;7), D2(0;-8;-2)	D1(0;-7;0), D2(0;8;0)	D1(1;1;1), D2(-4;-8;-5)	Інша відповідь

Варіант №22

1. Дано точки A(0;-1;-3) і B(4;0;1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{4}{\sqrt{33}};\frac{1}{\sqrt{33}};\frac{4}{\sqrt{33}}\right\}$	$\left\{\frac{-4}{\sqrt{33}};\frac{1}{\sqrt{33}};\frac{4}{\sqrt{33}}\right\}$	$\left\{\frac{4}{\sqrt{33}};\frac{-1}{\sqrt{33}};\frac{-4}{\sqrt{33}}\right\}$	Інша відповідь

2. Задані три вектори $\vec{a}=\{3,-2\},\vec{b}=\{-2,1\},\vec{n}=\{7,-4\}$. Визначити лінійний розклад вектора $\vec{a}$, приймаючи в якості базису два інших.

А	Б	В	Г
$-2\vec{b}+\vec{n}$	$5\vec{b}+4\vec{n}$	$2\vec{b}+\vec{n}$	Інша відповідь

3. Перша координата вектора $\vec{a}$ рівна -5, $|\vec{a}|=5\sqrt{2}$. Визначити другу координату вектора $\vec{a}$.

А	Б	В	Г
± 3	± 5	± 7	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|$=5, $|\vec{b}|$=6, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежно напрямлені.

А	Б	В	Г
-30	30	-1	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,-1,4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-4;1;-3)$ в точку $B(-4;0;4)$.

А	Б	В	Г
23	27	29	Інша відповідь

6. Дано вершини трикутника A(-1,-2,4), B(-4,-2,0) і C(3,-2,1). Обчислити його внутрішній кут при вершині B.

А	Б	В	Г
$20°$	45°	$60°$	Інша відповідь

7. Дано вектори $\vec{a}=\{2,-3,1\},\vec{b}=\{-3,1,2\},\vec{n}=\{1,2,3\}$. Знайти $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]$.

А	Б	В	Г
$\{-12,1,8\}$	$\{5,0,3\}$	$\{-7,14,-7\}$	Інша відповідь

8. Площа трикутника АВС дорівнює $\frac{\sqrt{35}}{2}$. Дві його вершини знаходяться в точках A(2; -1; 3) і B(1; 2; 1). Знайдіть координати третьої вершини C, якщо вона знаходиться на осі Oz.

А	Б	В	Г
(2; 0; 3)	(0; 0; 2)	(0; 0; -2)	Інша відповідь

9. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $30°$. Обчислити $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$, якщо $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 3$ і трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ права.

А	Б	В	Г
27	22	57	Інша відповідь

10. Обчислити об'єм піраміди ABCD з вершинами у точках A(1,-2,-1),B(4,4,4),C(2,1,-1), D(3,0,3).

А	Б	В	Г
$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	Інша відповідь

Варіант №23

1. Дано точки A(-5;-2;1) і B(0;-4;2). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-5}{\sqrt{30}};\frac{2}{\sqrt{30}};\frac{-1}{\sqrt{30}}\right\}$	$\left\{\frac{5}{\sqrt{30}};\frac{2}{\sqrt{30}};\frac{1}{\sqrt{30}}\right\}$	$\left\{\frac{5}{\sqrt{30}};\frac{-2}{\sqrt{30}};\frac{1}{\sqrt{30}}\right\}$	Інша відповідь

2. Задані вектори $\vec{a} = \{3, -1\}, \vec{b} = \{1, -2\}, \vec{n} = \{-1, 7\}$. Визначити лінійний розклад вектора $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А	Б	В	Г
$2\vec{a} - 3\vec{b}$	$6\vec{a} - 4\vec{b}$	$5\vec{a} - 6\vec{b}$	Інша відповідь

3. Перша координата вектора $\vec{a}$ рівна 5, $|\vec{a}| = \sqrt{34}$. Визначити другу координату вектора $\vec{a}$.

А	Б	В	Г
± 1	± 3	$\pm\sqrt{6}$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|$=2, $|\vec{b}|$=3, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежно напрямлені.

А	Б	В	Г
-1	-6	6	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,-2,0\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-4;1;-5)$ в точку $B(-3;2;1)$.

А	Б	В	Г
3	2	7	Інша відповідь

6. Дано точки A(2,0,1),B(2,1,0),C(1,0,0).Знайти кут ABC.

А	Б	В	Г
30°	45°	60°	Інша відповідь

7. Дано: $|\vec{a}|=10, |\vec{b}|=2$ та $\vec{a}\vec{b}=12$. Знайти $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

А	Б	В	Г
16	3	22	Інша відповідь

8. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=8\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{b}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

А	Б	В	Г
$21\sqrt{5}$	$18\sqrt{2}$	$16\sqrt{3}$	Інша відповідь

9. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ заданих своїми координатами: $\vec{a}=\{1,-1,1\}, \vec{b}=\{7,3,-5\}, \vec{c}=\{-2,2,-2\}$.

А	Б	В	Г
48	-6	0	Інша відповідь

10. У тетраедрі з вершинами в точках A(2,2,1), B(3,1,2), C(3,3,2), D(4,5,-3) обчислити висоту h, опущену з вершини D.

А	Б	В	Г
$3\sqrt{5}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{3}$	Інша відповідь

Варіант №24

1. Дано точки A(-1;-2;3) і B(4;0;-2). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-5}{\sqrt{54}};\frac{2}{\sqrt{54}};\frac{5}{\sqrt{54}}\right\}$	$\left\{\frac{5}{\sqrt{54}};\frac{2}{\sqrt{54}};\frac{-5}{\sqrt{54}}\right\}$	$\left\{\frac{-5}{\sqrt{54}};\frac{-2}{\sqrt{54}};\frac{5}{\sqrt{54}}\right\}$	Інша відповідь

2. Задані вектори $\vec{a}=\{2,3\}, \vec{b}=\{1,-3\}, \vec{n}=\{-1,3\}$. При якому значенні коефіцієнту α вектори $\vec{d}=\vec{a}+\alpha\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{c}$ колінеарні?

А	Б	В	Г
–2	-3	-1	Інша відповідь

3. Перша координата вектора $\vec{a}$ рівна -2, $|\vec{a}| = \sqrt{53}$. Визначити другу координату вектора $\vec{a}$.

А	Б	В	Г
±5	±6	±7	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|$=5, $|\vec{b}|$=1, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однаково напрямлені.

А	Б	В	Г
-4	-6	4	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F} = \{5, 0, 3\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(-3; 3; -3)$ в точку $B(-4; 2; 5)$.

А	Б	В	Г
19	29	39	Інша відповідь

6. Знайти ортогональну проекцію вектора $\tilde{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$, якщо $\tilde{a} = \{2, 1, -2\}, \vec{b} = \{1, 2, -1\}$.

А	Б	В	Г
$\{1, -1, 2\}$	$\{1, 2, -1\}$	$\{1, -2, 6\}$	Інша відповідь

7. Дано вектори $\vec{a} = \{3, -1, -2\}$ та $\vec{b} = \{1, 2, -1\}$. Знайти координати векторного добутку $\left[\tilde{a}, \vec{b}\right]$.

А	Б	В	Г
$\{5, 1, 7\}$	$\{2, -2, 7\}$	$\{-3, -3, 6\}$	Інша відповідь

8. Знайти площу трикутника АВС, якщо А(4, 2, 3), В(5, 1, 2), С(6, 15, 8).

А	Б	В	Г
$\frac{1}{6}\sqrt{63}$	$\frac{1}{2}\sqrt{35}$	$\frac{1}{2}\sqrt{78}$	Інша відповідь

9. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, заданих своїми координатами: $\vec{a} = \{3, 5, 1\}, \vec{b} = \{4, 0, -1\}, \vec{c} = \{2, 1, 1\}$.

А	Б	В	Г
11	-23	-17	Інша відповідь

10. Об'єм піраміди V=2, три її вершини лежать у точках A(2;1;3), B(3;3;2), C(1;2;4) . Знайти координати четверної вершини D, якщо відомо, що вона знаходиться на осі Oz.

А	Б	В	Г
D1(9;1;7), D2(7;10;0)	D1(0;0;-1), D2(0;0;9)	D1(-4;5;-5), D2(-5;-8;9)	Інша відповідь

Варіант №25

1. Дано точки A(1;5;-4) і B(214;-3). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-1}{\sqrt{18}};\frac{-4}{\sqrt{18}};\frac{-1}{\sqrt{18}}\right\}$	$\left\{\frac{-1}{\sqrt{18}};\frac{4}{\sqrt{18}};\frac{-1}{\sqrt{18}}\right\}$	$\left\{\frac{1}{\sqrt{18}};\frac{-4}{\sqrt{18}};\frac{1}{\sqrt{18}}\right\}$	Інша відповідь

2. Задані вектори $\vec{a}=\{2,-3\}$, $\vec{b}=\left\{\frac{1}{2},2\right\}$. При яких значеннях коефіцієнту α будуть колінеарні наступні пари векторів $\vec{p}=\vec{a}+\alpha\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}-\alpha\vec{b}$.

А	Б	В	Г
8	0	-1	Інша відповідь

3. Вказати взаємне розміщення ненульових векторів a і b, для яких: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$.

А	Б	В	Г
$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)<\frac{\pi}{2}$	$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)>\frac{\pi}{2}$	$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $\left|\vec{a}\right|\geq\left|\vec{b}\right|$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ: $\left|\vec{a}\right|$=3, $\left|\vec{b}\right|$=4, $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

А	Б	В	Г
$6\sqrt{3}$	$4\sqrt{2}$	$5\sqrt{5}$	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,-1,3\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2;1;-2)$ в точку $B(3;3;-2)$.

А	Б	В	Г
9	6	3	Інша відповідь

6. Знайти ортогональну проекцію вектора $\vec{a}=\overline{AB}$ на вісь вектора $\vec{b}$, якщо $A(1,-1,1), B(0,-2,3), \vec{b}=\{2,3,-1\}$.

А	Б	В	Г
$\{-1,-3/2,1/2\}$	$\{-1,-1/5,1/2\}$	$\{-2,-1/5,1/2\}$	Інша відповідь

7. Дано вектори $\vec{a}=\{3,-1,-2\}$ та $\vec{b}=\{1,2,-1\}$. Знайти координати векторного добутку $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{b}\right]$.

А	Б	В	Г
$\{10,2,14\}$	$\{-20,13,9\}$	$\{-1,-17,-26\}$	Інша відповідь

8. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де $\vec{a}=\{4,-4,2\}$, $\vec{b}=\{2,3,6\}$.

А	Б	В	Г
$\frac{8\sqrt{29}}{7}$	$\frac{5\sqrt{17}}{21}$	$\frac{7\sqrt{13}}{24}$	Інша відповідь

9. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ заданих своїми координатами: $\vec{a}=\{2,1,0\}, \vec{b}=\{3,4,-1\}, \vec{c}=\{-1,-3,1\}$.

А	Б	В	Г
0	-2	-12	Інша відповідь

10. Знайти об'єм V паралелепіпеда побудованого на заданих векторах $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$: $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}; \vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}; \vec{c}=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.

А	Б	В	Г
25	8	13	Інша відповідь

Варіант №26

1. Дано точки A(2;-1;-1) і B(5;-3;1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{3}{\sqrt{17}};\frac{-2}{\sqrt{17}};\frac{2}{\sqrt{17}}\right\}$	$\left\{\frac{3}{\sqrt{17}};\frac{2}{\sqrt{17}};\frac{-2}{\sqrt{17}}\right\}$	$\left\{\frac{-3}{\sqrt{17}};\frac{-2}{\sqrt{17}};\frac{-2}{\sqrt{17}}\right\}$	Інша відповідь

2. Задані вектори $\vec{a}=\{2,-3\}, \vec{b}=\left\{\frac{1}{2},2\right\}$. При яких значеннях коефіцієнту α будуть колінеарні наступні пари векторів $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}+\alpha\vec{b}$?

А	Б	В	Г
$\alpha_1=-1,\ \alpha_2=-1$	$\alpha_1=-2,\ \alpha_2=1$	$\alpha_1=1,\ \alpha_2=-1$	Інша відповідь

3. Вказати взаємне розміщення ненульових векторів a і b, для яких: $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$.

А	Б	В	Г
$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $\lvert\vec{a}\rvert\geq\lvert\vec{b}\rvert$	$\angle(\vec{a},\vec{b})>\frac{\pi}{2}$	$\angle(\vec{a},\vec{b})<\frac{\pi}{2}$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ: $|\vec{a}|$=6, $|\vec{b}|$=3, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

А	Б	В	Г
-6	9	$3\sqrt{3}$	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,0,1\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(1;4;-3)$ в точку $B(1;0;0)$.

А	Б	В	Г
3	7	9	Інша відповідь

6. Знайти ортогональну проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$, якщо $\vec{a}=\{3,0,5\}, C(-2,1,3), D(0,1,0)$.

А	Б	В	Г
$\{14/29,0,-33/19\}$	$\{-12/35,0,21/17\}$	$\{-18/13,0,27/13\}$	Інша відповідь

7. Дано вектори $\vec{a}=\{3,-1,-2\}$ та $\vec{b}=\{1,2,-1\}$. Знайти координати векторного добутку $\left[(2\vec{a}-\vec{b}),(2\vec{a}+\vec{b})\right]$.

А	Б	В	Г
$\{20,4,28\}$	$\{6,33,-20\}$	$\{-25,-17,-3\}$	Інша відповідь

8. У трикутнику з вершинами A(3, 1, -1), B(1, 0, 1), C(3, -1, 2) знайти довжину висоти BD.

А	Б	В	Г
1	5	15	Інша відповідь

9. Дано вектори $\vec{a}=\{3,4,-1\}$, $\vec{b}=\{2,3,5\}$, $\vec{n}=\{1,0,1\}$. Знайдіть $\left((\vec{a}+\vec{b})\vec{b}\vec{c}\right)$.

А	Б	В	Г
34	28	24	Інша відповідь

10. Знайти об'єм V тетраедра ABCD, якщо A(3,-2,1), B(0,-1,2), C(3,1,-4), D(2,3,2).

А	Б	В	Г
$\frac{41}{9}$	$\frac{38}{3}$	$\frac{32}{7}$	Інша відповідь

Варіант №27

1. Дано точки A(0;2;4) і B(-1;-3;-5). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-1}{\sqrt{107}};\frac{-5}{\sqrt{107}};\frac{-9}{\sqrt{107}}\right\}$	$\left\{\frac{-1}{\sqrt{107}};\frac{-5}{\sqrt{107}};\frac{9}{\sqrt{107}}\right\}$	$\left\{\frac{-1}{\sqrt{107}};\frac{5}{\sqrt{107}};\frac{9}{\sqrt{107}}\right\}$	Інша відповідь

2. Задані вектори $\vec{a}=\{2,-3\},\vec{b}=\left\{\frac{1}{2},2\right\}$. При яких значеннях коефіцієнту α будуть колінеарні наступні пари векторів $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}$?

А	Б	В	Г
-7	При будь якому α вектори колінеарні	При будь якому α вектори не колінеарні	Інша відповідь

3. При якому значенні коефіцієнта α вектори $\vec{a}=\{2,3\}$ і $\vec{b}=\{10+2\alpha,-5\alpha-1\}$ колінеарні?

А	Б	В	Г
-5	-2	3	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ: $|\vec{a}|$=2, $|\vec{b}|$=3, $\varphi=\pi$.

А	Б	В	Г
0	6	-6	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,-3,4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(4;5;-2)$ в точку $B(1;1;-1)$.

А	Б	В	Г
3	1	31	Інша відповідь

6. Знайти ортогональну проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\{1,2,0\},\vec{b}=\{3,-2,1\}$.

А	Б	В	Г
$\{-3/14,1/7,-1/14\}$	$\{0,-5/2,1/15\}$	$\{-1/2,-5/12,3/5\}$	Інша відповідь

7. Дано: $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=26$ та $\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|=72$. Знайти $\vec{a}\vec{b}$.

А	Б	В	Г
±64	±24	±30	Інша відповідь

8. Знайти площу трикутника ABC, якщо A(-1, -1, -1), B(0, 1, 2), C(2, 1, 0).

А	Б	В	Г
$2\sqrt{6}$	$7\sqrt{6}$	$5\sqrt{7}$	Інша відповідь

9. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, заданих своїми координатами: $\vec{a}=\{1,2,3\},\vec{b}=\{5,-2,1\},\vec{c}=\{2,1,2\}$.

А	Б	В	Г
0	19	6	Інша відповідь

10. Знайти висоту DH тетраедра ABCD, якщо A(4,1,2),B(4,-1,1),C(2,5,3), D(3,-1,1).

А	Б	В	Г
$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{5}$	Інша відповідь

Варіант №28

1. Дано точки A(-2;3;-1) і B(4;2;-1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-6}{\sqrt{37}};\frac{-1}{\sqrt{37}};0\right\}$	$\left\{\frac{6}{\sqrt{37}};\frac{-1}{\sqrt{37}};0\right\}$	$\left\{\frac{-6}{\sqrt{37}};\frac{1}{\sqrt{37}};0\right\}$	Інша відповідь

2. Нехай $|\vec{a}|=3,\left|\vec{b}\right|=2$ і $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60^\circ$. Знайти $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$.

А	Б	В	Г
$7\sqrt{7}$	$6\sqrt{10}$	$2\sqrt{7}$	Інша відповідь

3. Визначити, при яких значеннях α,β вектори $\vec{a}=\{-6,\beta,2\},\vec{b}=\{\alpha,4,-1\}$ - колінеарні.

А	Б	В	Г
$3,-2$	$2,-12$	$3,-8$	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ: $|\vec{a}|$=6, $\left|\vec{b}\right|$=7, $\varphi=\frac{3\pi}{2}$.

А	Б	В	Г
0	-42	42	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,4,-2\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(0;-2;1)$ в точку $B(0;4;2)$.

А	Б	В	Г
26	24	22	Інша відповідь

6. Знайти ортогональну проекцію вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на вісь вектора $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$, якщо $A(3,-1,-2), B(-1,2,0), C(2,3,1), D(1,2,3)$.

А	Б	В	Г
$\{9/10, 1/6, 2/7\}$	$\{-5/6, -5/6, 5/3\}$	$\{2/11, 1/11, 5/11\}$	Інша відповідь

7. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$, обчислити $\left|\left[(\vec{a}+\vec{b}),(\vec{a}-\vec{b})\right]\right|$.

А	Б	В	Г
64	32	24	Інша відповідь

8. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}-10\vec{k}$.

А	Б	В	Г
$3\sqrt{437}$	$7\sqrt{501}$	$11\sqrt{278}$	Інша відповідь

9. Дано вектори $\vec{a}=\{3,4,-1\}$, $\vec{b}=\{2,3,5\}$, $\vec{n}=\{1,0,1\}$. Знайдіть $\left(\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\vec{a}\vec{c}\right)$.

А	Б	В	Г
$\sqrt{72}$	0	72	Інша відповідь

10. Знайти висоту DH тетраедра ABCD, якщо A(3,-2,1),B(0,-1,2),C(3,1,-4), D(2,3,2).

А	Б	В	Г
$32/\sqrt{788}$	$76/\sqrt{370}$	$11/\sqrt{317}$	Інша відповідь

Варіант №29

1. Дано точки A(5;-1;3) і B(2;1;0). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{3}{\sqrt{22}};\frac{-2}{\sqrt{22}};\frac{3}{\sqrt{22}}\right\}$	$\left\{\frac{-3}{\sqrt{22}};\frac{2}{\sqrt{22}};\frac{-3}{\sqrt{22}}\right\}$	$\left\{\frac{-3}{\sqrt{22}};\frac{-2}{\sqrt{22}};\frac{-3}{\sqrt{22}}\right\}$	Інша відповідь

2. Нехай $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2$ і $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60^\circ$. Знайти $|-\vec{a}-\vec{b}|$.

А	Б	В	Г
$\sqrt{19}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{3}$	Інша відповідь

3. При якому значенні коефіцієнта α вектори $\vec{a}=\{1,3\}$ і $\vec{b}=\{3+2\alpha, 2(4\alpha+5)\}$ колінеарні?

А	Б	В	Г
3	2	1	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ: $|\vec{a}|$=5, $|\vec{b}|$=7, $\varphi=0°$.

А	Б	В	Г
0	35	-35	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,5,-2\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(4;-1;5)$ в точку $B(0;5;5)$.

А	Б	В	Г
30	20	10	Інша відповідь

6. Знайти ортогональну проекцію вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на вісь вектора $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$, якщо $A(3,-1,-2), B(-1,2,0), C(2,3,1), D(1,2,3)$.

А	Б	В	Г
$\{-5/8,-2/8,2/7\}$	$\{-5/6,-5/6,5/3\}$	$\{3/5,5/6,-3/2\}$	Інша відповідь

7. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$, обчислити $\left|\left[(3\vec{a}-\vec{b}),(\vec{a}-2\vec{b})\right]\right|$.

А	Б	В	Г
60	69	52	Інша відповідь

8. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\{1;2;3\}$, $\vec{b}=\{0;-5;6\}$.

А	Б	В	Г
$\sqrt{242}$	$\sqrt{790}$	$\sqrt{519}$	Інша відповідь

9. Дано вектори $\vec{a}=\{3,4,-1\}$, $\vec{b}=\{2,3,5\}$, $\vec{n}=\{1,0,1\}$. Знайдіть $\left((2\vec{a}-3\vec{b})\vec{a}\vec{c}\right)$.

А	Б	В	Г
72	62	100	Інша відповідь

10.Знайти об’єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}, \vec{c}=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.

А	Б	В	Г
10	14	13	Інша відповідь

Варіант №30

1. Дано точки A(-1;-4;2) і B(5;0;-1). Знайти орт вектора $\overline{AB}$.

А	Б	В	Г
$\left\{\frac{-6}{\sqrt{61}};\frac{-4}{\sqrt{61}};\frac{3}{\sqrt{61}}\right\}$	$\left\{\frac{6}{\sqrt{61}};\frac{-4}{\sqrt{61}};\frac{3}{\sqrt{61}}\right\}$	$\left\{\frac{6}{\sqrt{61}};\frac{4}{\sqrt{61}};\frac{-3}{\sqrt{61}}\right\}$	Інша відповідь

2. Дано три вектора $\vec{a}=\{3,-2\}, \vec{b}=\{-2,1\}, \vec{n}=\{7,-4\}$. Знайти розклад вектора $\vec{c}$, приймаючи за базис два інших.

А	Б	В	Г
$5\vec{a}-2\vec{b}$	$\vec{a}-2\vec{b}$	$\vec{a}+3\vec{b}$	Інша відповідь

3. Перша координата вектора $\vec{a}$ рівна -1, $|\vec{a}|=\sqrt{26}$. Визначити другу координату вектора $\vec{a}$.

А	Б	В	Г
±5	±6	±2	Інша відповідь

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо: $|a|$=5, $|b|$=1, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однаково напрямлені.

А	Б	В	Г
-5	-9	-6	Інша відповідь

5. Знайти, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5,4,-4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(1;-5;2)$ в точку $B(0;0;3)$.

А	Б	В	Г
21	11	19	Інша відповідь

6. При якому значенні α вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярними $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+\alpha\vec{k}, \vec{b}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$.

А	Б	В	Г
-9/2	7/5	-9/4	Інша відповідь

7. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ створюють кут $\varphi = 2\pi/3$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, обчислити $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]^2$.

А	Б	В	Г
		3	Інша відповідь

8. Знайти довжину висоти трикутника ABC, опущеної з вершини C, якщо A(1, 2, 3), B(2, 0, 1), C(1, 0, 3).

А	Б	В	Г
1	6	7	Інша відповідь

9. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $30°$. Обчислити $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$, якщо $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 3$ і трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ліва.

А	Б	В	Г
10	-6	-27	Інша відповідь

10. Об’єм піраміди V=2, три її вершини лежать у точках A(2;1;3), B(3;3;2), C(1;2;4) . Знайти координати четверної вершини D, якщо відомо, що вона знаходиться на осі Oz.

А	Б	В	Г
D1(0;0;4), D2(0;0;9)	D1(0;0;-1), D2(0;0;9)	D1(0;0;6), D2(0;0;1)	Інша відповідь

Зразок контрольної роботи

Варіант 0

1. Дано точки $A(-1;-4;2)$ і $B(5;0;-1)$. Знайти модуль та орт вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$, обчислити $(2\vec{a}+3\vec{b})^2$.
3. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=2\vec{i}+\beta\vec{j}-6\vec{k}$ і $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k}$: а) колінеарні, б) перпендикулярні.
4. Довести, що вектори $\vec{a}\{1;-1;1\}$, $\vec{b}\{-1;3;4\}$, $\vec{c}\{-1;-1;-2\}$ утворюють базис у тривимірному просторі, та розкласти за цим базисом вектор $\vec{d}\{-2;-2;0\}$.
5. Знайти яку роботу виконує сила $\vec{F}=\{5;4;-4\}$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(1;-5;2)$ в точку $B(0;0;3)$.
6. Обчислити косинус кута між напрямним вектором бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і вектором $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо $A(-4;-2;-5)$, $B(-3;6;0)$, $C(-2;2;-1)$.
7. Вершини заданого трикутника ABC знаходяться в точках А (4; 1), *B* (7; 5) і *C* (-4; 7). Знайти довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині *A*.
8. Визначити площу трикутника, вершини якого мають координати *A* (4; 2), *B* (9; 4), *C* (7; 6).
9. Визначити полярні координати точок, симетричних відносно полярної осі точкам $M_1\left(3;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(2;-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(3;-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $M_4(1;2)$, $M_5(5;-1)$, які задані в полярній системі координат.
10. В полярній системі координат дано дві суміжні вершини квадрату $M_1\left(12;-\dfrac{\pi}{10}\right)$ і $M_2\left(3;\dfrac{\pi}{15}\right)$. Визначити його площу.

Список літератури

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии/ Александров П.С.- М: Наука, 1968. - 912 с.
2. Аналітична геометрія./[Білоусова В.П., Ільїн І.Г., Сергумова О.П., Котлова В.Н.]-К: Вища школа, 1973.- 328 с.
3. Атанасян Л.С. Аналитическая геометрия/ Атанасян Л.С. - М.: «Просвещение» т. 1 1967. - 300с.
4. Атанасян Л.С. Сборник задач по аналитической геометрии./ Л.С. Атанасян, В.А. Атанасян. - М.: Просвещение, 1968.- 246 с.
5. Борисенко О.А. Аналітична геометрія./ О.А. Борисенко, Л.М. Ушакова. - Харків: Основа, 1993.- 192 с.
6. Гриньов Б.В. Аналітична геометрія/ Б.В. Гриньов, І.К. Кириченко. -Харків:Гімназія, 2008. - 163 с.
7. Гриньов Б.В. Векторна алгебра./ Б.В. Гриньов, І.К. Кириченко. - Харків: Гімназія, 2008.- 340 с.
8. Збірник задач з аналітичної геометрії./ За редакцією Кириченко В.В.: Кам'янець-Подільський: «Аксіома», 2005.- 228 с.
9. Кириченко В.В. Аналітична геометрія: навчальний посібник./ В.В. Кириченко, Н.Ю. Петкевич, А.П. Петравчук. - К.: ВПЦ «Київський університет», 2003.- 192 с.
10. Клетеник В.Н. Сборник задач по аналитической геометрии/ Клетеник В.Н. - М.: Наука, 1986.- 224 с.
11. Кравченко В.В. Вища математика. Векторна алгебра та аналітична геометрія./ В.В. Кравченко, Т.В. Лубенська, Т.І. Олешко. - К: Книжкове видавництво НАУ, 2005.- 144 с.
12. Моденов П.С. Аналитическая геометрия./ Моденов П.С. - М: Издательство МГУ, 1969. - 698 с.
13. Моденов П.С. Сборник задач по аналитической геометрии/ П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. - М.: Наука, 1976.- 385 с.
14. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия/ Погорелов А.В.- М.: Наука 1978.- 176 с.
15. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии/ Цубербиллер О.Н. - М: Наука 1970.- 336 с.